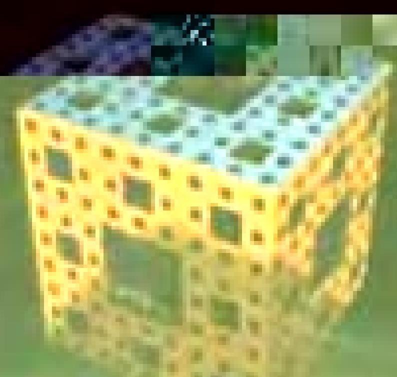
# 数学

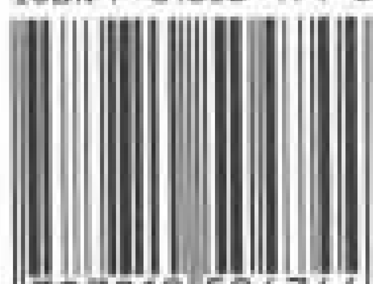
## 它的起源与方法

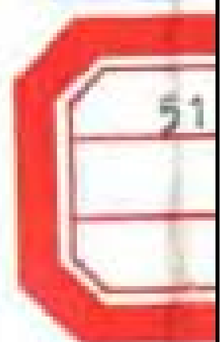
· 朱家生　姚林 ·



责任编辑：黄英萍
封面设计：赵梃枫





7-81050-474-6/O·22
定价：13.50元

# 数学，它的起源与方法

朱家生　姚林





东南大学出版社

## 内 容 提 要

本书以问题为切入点，从历史的角度对数学科学的一些重要思想方法及其产生、发展的过程进行了研究，对涉及的著名数学家的生平和工作也做了介绍。各个专题独立成篇，通读全书可了解数学发展的全貌。

本书可作为大学数学专业本、专科学生和相关专业硕士研究生的《数学思想史》课程的教材或参考资料，还可供中学数学教师参考，对广大数学爱好者丰富数学知识、提高数学修养也有一定的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

数学，它的起源与方法/朱家生，姚林.—

南京：东南大学出版社，1999.5

ISBN 7—81050—474—6

Ⅰ.数… Ⅱ.①朱…②姚… Ⅲ.数学方法-方法论 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17542 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人：洪焕兴

江苏省新华书店经销 如东县印刷厂印刷

开本：850mm×1168mm1/32 印张：9 字数：240 千字

1999 年 5 月第 1 版 1999 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—3000 册 定价：13.50 元

# 序

数学是人类几千年来智慧的结晶。随着时代的进步，数学的思想、方法与内容已渗透到现实生活的各个领域，科学技术的数学化已成为一种共识。现实生活需要数学，现代化人才必须掌握数学。数学发展至今天，已成为一个庞大的系统，但她又确实是在远古时期简单的数与形的概念的基础上发展起来的。如果我们不去追溯古今数学思想方法的演变与发展，就不可能真正理解数学的真谛，正确地把握数学发展的动力和方向。正如法国数学家庞加莱所说："如果我们想要预知数学的未来，最合适的途径就是研究这门科学的历史和现状。"

《数学，它的起源与方法》的作者试图将数学的思想方法放到特定的历史背景中去处理，以便从历史发展的角度纵向剖析，横向比较，这对于理解与掌握数学的概念、思想与方法无疑是很有益处的。全书以问题为切入点，深入浅出，简明清晰，同时编排上独具匠心，既显示了数学历史发展的脉胳，又考虑到各数学分支的内容和方法的相对独立性，从而使读者能在不长的篇幅中对数学的全貌有所了解。如果数学教育工作者能够充分地应用历史史料，把生动有趣的数学思想方法融汇到数学教学过程中去，那么我们所教的数学将变得有血有肉，不仅有用，而且有趣；我们的学生也将更加自觉和乐意地去学习和应用数学。

王梓坤

# 目　　录

1　**数学的萌芽** ………………………………………… ( 1 )
　1.1　古巴比伦的数学 …………………………………… ( 1 )
　1.2　古埃及的数学 ……………………………………… ( 6 )
2　**希腊的数学学派** …………………………………… ( 12 )
　2.1　爱奥尼亚学派与几何证明 ………………………… ( 12 )
　2.2　毕达哥拉斯学派与“万物皆数” …………………… ( 14 )
　2.3　巧辩学派与尺规作图不能问题 …………………… ( 17 )
　2.4　柏拉图学派 ………………………………………… ( 19 )
　2.5　欧多克索斯学派与比例论 ………………………… ( 22 )
3　**亚历山大时期的三巨匠** …………………………… ( 24 )
　3.1　欧几里得与《几何原本》 ………………………… ( 25 )
　3.2　数学之神阿基米德 ………………………………… ( 30 )
　3.3　阿波罗尼斯与《圆锥曲线》 ……………………… ( 40 )
　3.4　三巨匠以后的希腊数学 …………………………… ( 41 )
4　**来自神秘国度的继承者与传播者** ………………… ( 44 )
　4.1　印度的数学 ………………………………………… ( 44 )
　4.2　阿拉伯人的数学 …………………………………… ( 50 )
5　**源远流长的中国古代数学** ………………………… ( 58 )
　5.1　先秦时期——数学的萌芽 ………………………… ( 58 )
　5.2　汉唐时期——体系的形成 ………………………… ( 61 )
　5.3　宋元时期——传统数学的兴盛 …………………… ( 66 )
　5.4　明清时期——衰落与复苏 ………………………… ( 70 )

6 《九章算术》与它的注释者们 …………………………… ( 75 )
6.1 《九章算术》简介 ……………………………… ( 75 )
6.2 刘徽与他的《九章算术注》……………………… ( 78 )
6.3 祖冲之与祖暅 ………………………………… ( 82 )
6.4 其他的注释者 ………………………………… ( 84 )
7 中国剩余定理 …………………………………… ( 85 )
7.1 孙子问题 ……………………………………… ( 85 )
7.2 秦九韶的成就 ………………………………… ( 88 )
7.3 西方学者的研究 ……………………………… ( 90 )
8 希望的曙光 ……………………………………… ( 93 )
8.1 欧洲中世纪的回顾 …………………………… ( 93 )
8.2 欧洲文艺复兴时期的数学 …………………… ( 95 )
8.3 意大利学者关于三、四次方程解法的研究 …… ( 98 )
9 从丢番图到韦达 ………………………………… (102)
9.1 丢番图对符号代数的贡献 …………………… (103)
9.2 韦达的工作 …………………………………… (105)
10 数学的转折点……………………………………… (111)
10.1 解析几何产生的背景……………………………… (111)
10.2 费尔马的坐标法…………………………………… (112)
10.3 笛卡儿的解析几何………………………………… (114)
10.4 解析几何的完善与发展…………………………… (118)
10.5 解析几何产生的意义……………………………… (120)
11 巨人们的杰作……………………………………… (122)
11.1 古老的思想………………………………………… (122)

11.2 两个问题……………………………………………… (125)
11.3 先驱们的探索………………………………………… (127)
11.4 科学的巨人——牛顿 ………………………………… (129)
11.5 莱布尼兹的工作……………………………………… (130)
11.6 微积分的进一步发展………………………………… (133)
12 从“几何学中的海伦”谈起……………………………… (138)
12.1 “几何学中的海伦”…………………………………… (138)
12.2 欧拉和拉格朗日的工作……………………………… (142)
12.3 来自物理学的推动…………………………………… (144)
12.4 变分法的进一步发展………………………………… (146)
13 来自物理学的问题……………………………………… (148)
13.1 几个著名的问题……………………………………… (148)
13.2 欧拉与微分方程……………………………………… (150)
13.3 拉普拉斯的摄动法…………………………………… (155)
13.4 19世纪中几位大师的工作 …………………………… (156)
14 从赌徒的难题谈起……………………………………… (159)
14.1 赌徒的难题…………………………………………… (159)
14.2 来自保险业的推动…………………………………… (161)
14.3 概率论的基本方法和大师们的工作………………… (162)
14.4 应用举例……………………………………………… (165)
15 代数学的解放…………………………………………… (167)
15.1 19世纪以前的代数学 ………………………………… (167)
15.2 哈密顿的划时代的发现……………………………… (170)
15.3 两位年轻人的杰出贡献……………………………… (173)

16　青春的华章……………………………………………………（177）
16.1　方程求根公式的探索……………………………（177）
16.2　代数结构思想的形成……………………………（180）
16.3　代数结构思想的意义……………………………（183）
17　几何学的革命…………………………………………………（188）
17.1　关于第五公设的思考……………………………（188）
17.2　高斯、波尔约和罗巴切夫斯基的突破性工作 …（190）
17.3　非欧几何学………………………………………（193）
17.4　黎曼的贡献与非欧几何的发展…………………（196）
18　数学猜想与数论………………………………………………（199）
18.1　费尔马猜想——会下金蛋的母鸡………………（199）
18.2　筛法——神奇的数学之网………………………（204）
18.3　数学王子高斯的功绩……………………………（208）
19　从“田忌赛马”谈起…………………………………………（211）
19.1　孙膑的妙策………………………………………（211）
19.2　冯·诺伊曼 ………………………………………（212）
19.3　对策论的数量化、公理化和系统化 ……………（214）
19.4　瓦尔德与统计决策函数…………………………（219）
20　“疯狂的年轻人”……………………………………………（221）
20.1　初生的牛犊………………………………………（221）
20.2　共同的事业………………………………………（223）
20.3　结构主义…………………………………………（225）
21　电子计算机与计算机数学……………………………………（230）
21.1　电子计算机的诞生与发展………………………（230）

21.2 计算机数学……………………………………………(234)
22 **又是一场数学革命吗？**……………………………(238)
22.1 模糊数学产生的背景…………………………………(238)
22.2 模糊数学的思想和方法……………………………(240)
22.3 应用举例…………………………………………………(244)
23 **数学符号**…………………………………………………(246)
23.1 数学符号的历史演变…………………………………(246)
23.2 数学符号的方法论意义………………………………(252)
23.3 数学符号的选择原则…………………………………(256)
24 **数学悖论**…………………………………………………(262)
24.1 悖论的含义和渊源 …………………………………(262)
24.2 数学悖论与数学史上的三次“危机”……………(263)
24.3 数学悖论的成因和意义………………………………(267)
主要参考书目…………………………………………………(271)
后记………………………………………………………………(275)

# 1 数学的萌芽

数学是灿烂的人类文明的重要组成部分，有着非常悠久的历史. 据文字记载，至少在 5000 年前，人类已开始有了数学活动. 数学也和其他人类文明一样，最早发育于世界的四大文明古国：巴比伦、埃及、中国和印度. 就国外数学发展的源头而言，一般首推巴比伦数学与埃及数学. 我们首先介绍古巴比伦的数学.

## 1.1 古巴比伦的数学

所谓古巴比伦数学，是指萌发于古代美索波达米亚的数学. 美索波达米亚平原位于亚洲西部的幼发拉底与底格里斯两河流域，大体上相当于今天的伊拉克. 公元前 2000 年左右，这里建立起了古巴比伦王国. 在过去相当长的一段时间内，人们对于古巴比伦数学的认识是通过古希腊文化中的零星资料得到的. 19 世纪后期，考古学家开始发掘美索波达米亚遗址，它们是由过去长期存在过的城市的废墟所形成的土丘. 其中的房屋几乎都是用未经烧制的土坯建造的. 每次降雨后，房屋都要被冲毁一些，而新的房屋就建在同一地方，于是地面就逐渐升高，形成了现在的土丘. 如果给一幅土丘的垂直剖面图，就可以发现，同一个城市按不同的时期分成不同的层次，最古老的处在最底层. 在发掘的过程中，人们发现了数以万计的不同时期的泥板，它们是用胶泥制成的. 一块完整的泥板与手掌的大小差不多. 上面写有符号，这种符号是用断面呈三角形的尖棍在泥板还较软时刻上的，呈楔形，故人们称之为楔形文

字.经考证，这些泥板大多是在公元前 1 700 年前后制作的，其中大约有 400 片与数学内容有关的泥板，它们被许多国家的博物馆珍藏.经过专家们精心地复制与翻译，使我们能通过它们较为详细地了解到古巴比伦的数学概况.

### 1.1.1 古巴比伦的记数制与算术

古巴比伦人很早就有了数的写法，他们用楔形文字中较小的▼(竖写)代表 1，较大的▼(竖写)代表 60，较小的◢(横写)代表 10，较大的◢(横写)代表 100.借助于这些符号，巴比伦人表示自然数的符号如图 1—1 所示.

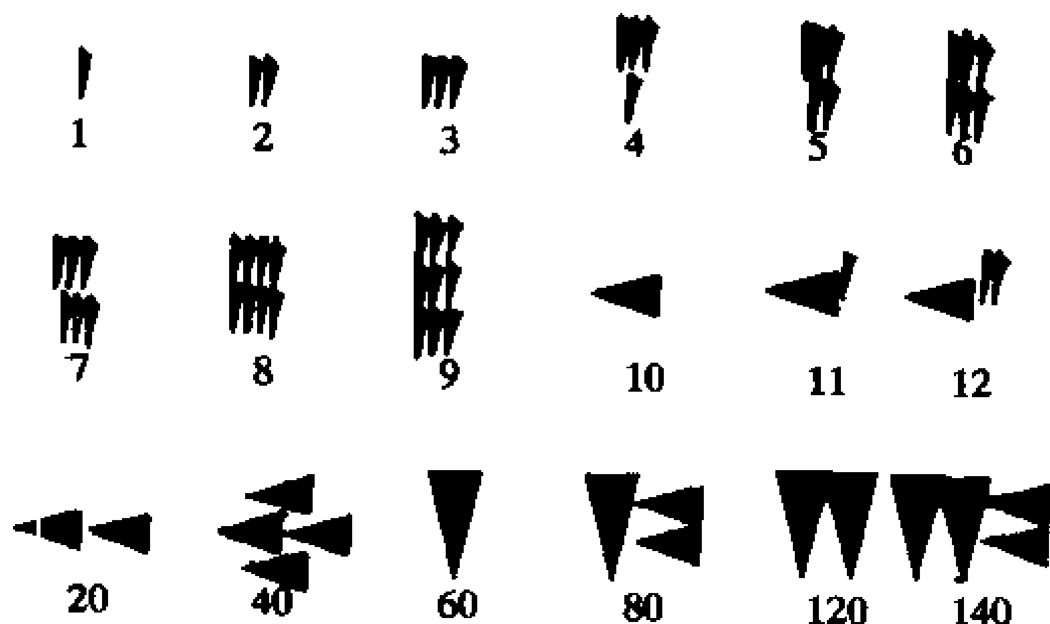



图 1—1

由此可知，古巴比伦人的记数系统是 60 进位制.他们为什么会以 60 为基数呢？研究者认为，这是由于 60 是 2，3，4，5，6，10，12，15，20，30 的倍数，在很大程度上可以使计算简化.但也有人认为，这是古巴比伦人天文学知识的直接产物.由于他们将一年分成 360 天，把圆周分成 360 等份，促使古巴比伦人建立起 60 进位制的记数法.不过，古巴比伦人所采用的是迭加数制，而不是位值数制.

古巴比伦人经常使用分数，他们又总是用 60 作为分母，例如◢◢作为分数来记时可以表示$\frac{20}{60}$，而▼▼▼作为分数来记时可以表示$\frac{21}{60}$或$\frac{20}{60}+\frac{1}{60^2}$，这是不太确定的，我们只能猜测. 显然，古巴比伦人的分数系统是不成熟的. 不过，对于$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$这几个特殊的分数，他们是有专门的记号的.

古巴比伦人的许多算术运算是借助于各种各样的表来进行的. 在已发现的泥板中，大约有 200 块是乘法表、倒数表、平方表、立方表，甚至还有指数表. 倒数表用于把除法转化为乘法进行，指数表可能是和插值法一起用来解决复利问题的. 例如有这样一个问题：设有本金为 1，利率为 20%，问需要多久即可使利息与本金相等. 这需要求解指数方程

$$(1+20\%)^x=2.$$

由指数表，古巴比伦人首先确定出 $x$ 的取值范围是：

$$3<x<4.$$

然后使用一次插入法求出 4 与 $x$ 的差，相当于现在这样的算法：

$$4-x=\frac{(1.2)^4-2}{(1.2)^4-(1.2)^3}\approx 0.21.$$

故得 $x\approx 4-0.21=3.79$(年).

### 1.1.2 古巴比伦的代数

古巴比伦数学的主要特征是它所具有的代数性质. 在公元前 2000 年前后，古巴比伦数学已演化成用文字叙述的代数学. 史实表明，他们解二次方程的方法相当于现在的公式法. 如英国大不列颠博物馆 13901 号泥板记载了这样一个问题："我把我的正方形的面积加上正方形边长的三分之二得$\frac{35}{60}$，求该正方形的边长." 这个问题相当于求解方程

$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}.$$

该泥板上给出的解法是:1 的三分之二是$\frac{40}{60}$,其一半是$\frac{20}{60}$,将它自乘得$\frac{6}{60}+\frac{40}{60^2}$,并把它加到$\frac{35}{60}$上得$\frac{41}{60}+\frac{40}{60^2}$,其平方根是$\frac{50}{60}$,再从中减去$\frac{40}{60}$的一半得$\frac{30}{60}$,于是$\frac{1}{2}$就是正方形的边长.这一解法相当于将方程 $x^2+px=q$ 的系数代入公式

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$$

求解,只是在计算时用 60 进位制.又如:两个正方形的面积之和为 1000,其中一个正方形的边长为另一个正方形的边长的$\frac{2}{3}$减去 10,求这两个正方形的边长.设较大的正方形的边长为 $x$,则另一正方形的边长为$\frac{2}{3}x-10$,故只需解二次方程

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x-10\right)^2=1000.$$

古巴比伦人将这一解法所需的步骤简单地叙述为"平方 10,得 100;1000 减去 100,就得 900,开平方得 30",求得该正方形的边长为 30,另一个边长为 10.这就是说,古巴比伦人那时可能已经知道某些类型的一元二次方程的求根公式.由于他们没有负数的概念,所以二次方程的负根他们不予考虑.至于他们是如何得到上述这些解法的,泥板上没有具体说明,我们也就不得而知了.

他们还讨论了某些三次方程和双二次方程的解法.在一块泥板上,他们给出这样的数表,它不仅包含了从 1 到 30 的整数的平方和立方,还包含这个范围内的整数组合 $m^3+m^2$,专家经研究认为,这个数表是用来解决形如 $x^3+x^2=b$ 的三次方程的.

在洛佛尔博物馆的一块泥板上还发现了两个级数问题,用现

代形式可表述为

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1;$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3})55=385.$$

古巴比伦人究竟是通过计算得到上述结果的,还是掌握了这些级数求和的技巧甚至公式,对于我们来说也还是一个谜.

古巴比伦人还对非完全平方数的平方根给出了一些有趣的近似值,如$\sqrt{2}\approx\frac{17}{12},\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{17}{24}$.在耶鲁第7289号泥板上还发现了$\sqrt{2}$的非常值得注意的近似值

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.4142155.$$

特别令人感兴趣的是哥伦比亚大学普林顿收集馆中收藏的第322号泥板,该泥板已缺损了一部分,在残留的部分上刻有三列数,专家研究认为:这是一张勾股数(即$x^2+y^2=z^2$的整数解)表,并且极有可能是用下列参数式

$$x=2uv,\quad y=u^2-v^2,\quad z=u^2+v^2$$

求得的.而这是在一千多年以后古希腊数学中一个极为重要的成就.

### 1.1.3 古巴比伦的几何

在古巴比伦人的心目中,几何是不重要的,因为实际中的几何问题都很容易转化为代数问题.他们的面积和体积计算是按照一些固定的法则和公式给出的.这从许多具体例子可以看到.例如古巴比伦人在公元前2000年到公元前1600年,就已熟悉了长方形、直角三角形、等腰三角形以及直角梯形面积的计算.他们还掌握了长方体,以及特殊梯形为底的直棱柱体积计算的一般规则,他们知道取直径的三倍为圆周的长,取圆周平方的$\frac{1}{12}$为圆的面积,还用底和高相乘求得直圆柱的体积.在泥板中有足够的证据表明,古巴

比伦人还有把相当复杂的图形拆成一些简单图形的组合的本领.但他们错误地认为,圆台或方棱台的体积是两底之和的一半与高的乘积.这一事实表明,古巴比伦的计算方法还是经验型的,这些结果都没有严格的证明.

### 1.1.4 古巴比伦的天文学

在公元前5000年到公元前4000年间,古巴比伦人已开始使用年、月、日的天文历法,他们的年历是从春分开始的,一年有12个月,第一个月是以“金牛座”命名的,每月有30天,并且每6年加上第13个月作为闰月.一个星期有7天,这7天是以太阳、月亮和金、木、水、火、土七星来命名的,每个星神主管一天,如太阳神主管星期日.因此,所谓“星期”也就是指星的日期,我们现在的“星期制”就是古巴比伦时代所创立的.此外,圆周分为360度,每度60分,每分60秒,1小时60分,1分60秒的记法,也来自古巴比伦.

## 1.2 古埃及的数学

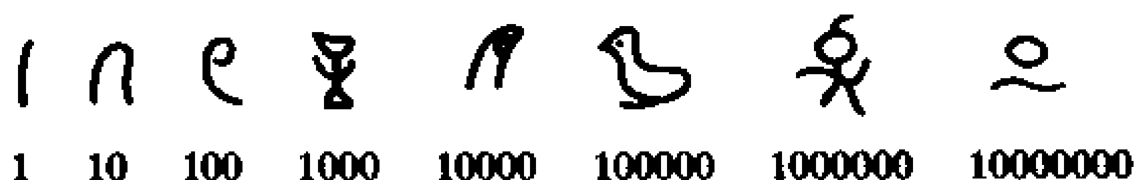
古埃及的位置与现在埃及的地理位置区别不大,位于世界上最长的河流之一——非洲的尼罗河中下游的谷地.早在公元前3000年左右,在这块土地上就已经形成了早期奴隶制国家.打猎、渔业及畜牧业是古埃及人最初的谋生方式.一年一度的尼罗河的洪水给这片谷地带来了肥沃的淤泥,那些以游牧为生的古埃及人便开始在这里定居下来,转向以耕种为主.在发展农业的同时,手工业与贸易也随之迅速发展起来,这些都促进了自然科学各学科知识的积累.例如,对尼罗河洪水规律性的研究,使埃及人很早就有了季节的概念.为了准确地预报尼罗河洪水泛滥的时间,他们通过对天体运动的观察,发现每逢天狼星清晨升起的时候,也正是尼罗河水开始上涨的时候.因此,他们把天狼星的两个清晨升起的间隔当作一年,它包含365天.他们还把一年分成12个月,每个月30个昼夜,在每一年末增加5天,用来过年节.

据考证,这一时期古埃及的科学文化技术(包括数学)有了很大的发展.在这一时期建立的金字塔、人面狮身像和神庙以及宫殿都是埃及古老文明的标志.以位于开罗附近吉萨省的胡夫金字塔为例,这座埃及最大的金字塔建于公元前2100年左右,是当时埃及法老胡夫的陵墓.该金字塔呈正四棱锥形,底面正方形面向东西南北四个正方向,边长230.5m,塔高146.6m,是1848年美国华盛顿纪念碑(高169m)建成之前世界上最高的建筑物.近年来,科学家们使用精密的仪器对这一金字塔进行了测量,惊奇地发现,其底基正方形边长的相对误差不超过1∶14000,四底角的相对误差不超过1∶27000,即不超过12",四个方向的误差也仅在2'～5'之间,这些都说明当时的测量水平已相当高.又如他们所建的神庙,能使得每年在确定的那几天里,太阳光正好透过特意在屋面上留出的小孔,直接射到神像的脸上.

古埃及人在建造了神奇的金字塔、神庙和宫殿的同时,也创立了相当发达的数学.从公元前3000年起,古埃及人开始有了他们的象形文字,其中最具代表性的是僧侣们所使用的僧侣文(又称祭司文).流传至今的古埃及文献,大部分是以这种僧侣文书写在纸草上保存下来的.这种纸草是用尼罗河的水草晒干制成的,保存至今的有关数学的纸草书主要有两种:一种是陈列于英国伦敦大不列颠博物馆东方展室中的兰德纸草书,这是由英国人兰德(H. Rhind)1858年搜集到的;另一种收藏于俄国莫斯科美术博物馆,被称为莫斯科纸草书,这是由俄罗斯人郭列尼舍夫于1893年搜集到的.这两份纸草书都是公元前2000年前后的作品,为古埃及人记录一些数学问题的问题集.兰德纸草书长544cm,宽33cm,共载有85个问题,莫斯科纸草书长544cm,宽8cm,共载有25个问题.学者们从这些纸草书以及其他保留至今的历史文献中了解到古埃及人的数学.

### 1.2.1 古埃及的记数制与算术

从前面所述的历史文献中我们知道,古埃及人使用的是十进记数制,并且有数字的专门符号(见图 1—2).



1　10　100　1000　10000　100000　1000000　10000000

图 1—2

在一个数中出现某单位的若干倍时,就将它的符号重复写若干次,即遵守加法的法则.显然,古埃及人的计数系统是进位制而不是位值制.古埃及人已有了分数的概念,但他们仅使用单位分数也就是分子为1的分数,表示整体的若干等份中的一份.只有$\frac{2}{3}$是一个例外.他们还会将不是单位分数的分数化为单位分数的和,但这种化法是不唯一的,如$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$.

古埃及人不仅用符号来表示数,而且还使用某些运算符号.例如他们用形如人的脚的符号,从右向左表示加法,从左向右表示减法,两个量的差用三个水平的箭头表示,猫头鹰的形象则被用来表示相等.

古埃及人的乘法运算与除法运算都是通过迭加来进行的。例如计算 26×33,他们先将 33 的倍数列表(如表 1—1),然后从左边一列中选取出和为 26 的 2,8 和 16,再将右边一列中它们各自对应的数相加,即将 66,264,528 相加得到 856 即为所求.又如 19÷8,他们是将 8 的倍数与部分列表(如表 1—2),再从右边一列中选取出其和为 19 的

表 1—1

| n | 33n |
|---|---|
| 1 | 33 |
| *2 | 66 |
| 4 | 132 |
| *8 | 264 |
| *16 | 528 |

表 1—2

| α | 8α |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 2 | 16* |
| 1/2 | 4 |
| 1/4 | 2* |
| 1/8 | 1* |

16,2,1 三个数,并将其对应的左边一列中的三个数 2,1/4,1/8 相加即为所求.

### 1.2.2 古埃及的代数

在兰德纸草书中有一些讨论"计算若干"的问题. 例如图 1—3 中的象形文字:

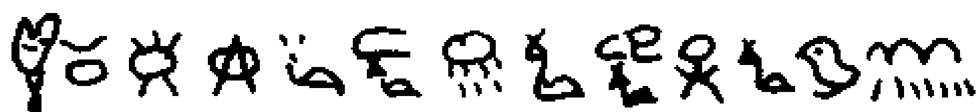


图 1—3

其意思是:某数为若干,它的$\frac{2}{3}$加上它的$\frac{1}{2}$加上它的$\frac{1}{7}$,再加上这个数本身等于 37. 我们假设这个数为 $x$,则有

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=37.$$

这是一个一元一次方程问题,他们解决这类问题的办法是试位法. 举一个简单的例子来说明这个方法,对于方程

$$x+\frac{x}{7}=24,$$

先给 $x$ 选定一个数值,譬如说 7,于是 $7+\frac{7}{7}=8$,而不是 24,因为 8 必须乘以 3 才是 24,故 $x$ 的正确的值一定是 7 乘以 3 即 21.

古埃及人还用它来解二次甚至更高次的方程. 例如在卡洪(Kahun)发现的一份大约是公元前 1950 年的纸草书中记载了下列问题:将给定的 100 单位的面积分为两个正方形,使二者的边长之比为 $1:\frac{3}{4}$. 若设此二正方形的边长分别为 $x,y$,且 $y=\frac{3}{4}x$,由题设 $x^2+y^2=100$,首先取 $x=4$,则 $y=3h$,此时 $x^2+y^2=25$,而不是 100,因此 $x,y$ 的值需修正. 事实上,只需将原数值加倍,即可得方程的解 $x=8,y=6$. 必须指出的是,"试位法"对于解决属于一元一次方程的问题,可能得到精确的解,而对于二次以上的方

程,这种方法一般情况只能给出近似解.

在兰德纸草书中有这样一个问题:今有十斗麦子分给十个人,每人依次递降$\frac{1}{8}$斗,问各得多少?这是已知一个等差数列的前若干项和、项数以及公差求其各项的问题.纸草书给出了其首项是$a_1 = 1\frac{9}{16}$,再根据题意就不难求出这个数列的各项,也就是各人所得了.

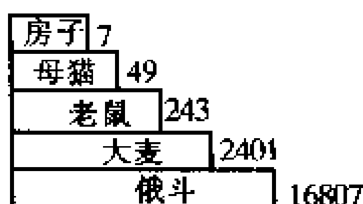



图 1—4

等比数列也已在古埃及纸草书中出现.兰德纸草书中给出一个阶梯图形(如图 1—4),对此,数学史家康托尔是这样解释的:在一个人的财产中,有七间房子,每间房子里七只猫,每只猫能捉七只老鼠,每只老鼠能吃七穗大麦,而每穗大麦又能长出七俄斗大麦,问这份财产中房子、猫、老鼠、麦穗和麦子总共有多少?按照这样的解释,这显然是一个公比为 7 的等比数列求和问题,阶梯图形给出的是这个数列中的各项.

### 1.2.3 古埃及的几何学

在建筑规模宏大的教堂、金字塔时,在修建复杂的灌溉系统时,都需要测量;尼罗河水泛滥后冲刷了许多边界标记,洪水退后也需要重新勘测土地的界线;…… 所有这一切,为认识基本几何形状和形成几何概念提供了肥沃的土壤,因此,古埃及人的几何学知识更为丰富.在上述两种纸草书的 110 个问题中,有 26 个是几何问题,其中大部分是从计算土地面积与谷物体积中产生的,还有许多与金字塔有关.例如,在兰德纸草书中有这样一个问题:"已知金字塔的陡度为每肘五手又一指(一肘为七手,一手为五指),底面边长为 140 肘,求其高."在莫斯科纸草书中也有这样一个问题,用现代语言表达就是:"如果告诉你一个截顶金字塔的垂直高度为

6,底边为4,顶边为2,求其体积."古埃及人的算法是:4的平方为16,4的二倍为8,2的平方是4,把16,8和4相加得28,取6的三分之一为2,取28的二倍为56,则它的体积就是这个数.由此我们可以看出,古埃及人是通过具体问题说明了高为$h$,底边长为$a$和$b$的方棱台的体积公式是

$$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h.$$

著名数学史家贝尔形象地将这一古埃及数学杰作称为"最伟大的埃及金字塔".此外,在古埃及的纸草书中:圆的面积等于直径的$\frac{8}{9}$的平方,由此可知,他们把圆周率近似地取为3.16;直圆柱的体积为底面积与高的乘积.最近的研究还表明,古埃及人似乎已经知道任何三角形的面积均为底与高的乘积的一半.

以上我们介绍了古巴比伦和古埃及的数学,可以看出,它们的内容都与那个地区的社会和生活的需要密切相关的.古巴比伦人对天文学的研究比较感兴趣,因此,相对而言,他们的以60进位记数法为基础的算术与代数较为领先.而古埃及人偏重于测量与建筑施工,因而他们的几何成果比较突出.这些表明,数学从她的萌芽之日起,就是以实际需要为基础的,离开了实际需要,数学研究就缺少了直接动力,数学也就不能迅速发展了.需要指出的是,在古巴比伦或古埃及数学中,虽然出现了一些令人信服的数表和许多重要的公式,但他们的数学知识还仅仅表现为对于一些实际问题观察的结果,以及某些经验的积累,数学学科所特有的逻辑思维与理论概括甚至还未被他们觉察,更谈不上掌握了.因此,从这个意义上来说,数学作为一门科学还远远没有建立起来,正如美国著名数学史家M.克莱因在《古今数学思想》一书中所说的那样,"按这个标准说,埃及人和巴比伦人好比粗陋的木匠,而希腊人则是大建筑师."因此真正科学意义下的数学,要在古希腊人登场以后,才被真正建立起来.

# 2 希腊的数学学派

古代希腊的地域范围是以希腊半岛为中心,包括东面爱琴海和西面爱奥尼亚海中的岛屿以及今土耳其西南沿岸,意大利南部及西西里岛东部沿岸地区.与古代东方文明古国大河流域沃野千里的特色相比,古代希腊则是地少山多,海岸曲折,岛屿密布.优良的自然条件,使得这里的农业,手工业和航海事业比欧洲其他地方更早地得到发展.

公元前8世纪前后,希腊进入了奴隶制形成阶段,社会经济进一步发展起来,产生了许多奴隶制城邦,并在东西地中海及黑海一带兴建了一系列殖民城市.这些城市加强了希腊和海外各地的商业联系,为希腊接触并吸收优秀的东方文化提供了方便.

从公元前6世纪起,由于经济和政治的进步,希腊出现了欧洲文化的第一个高峰,希腊数学就是其中的重要成就之一.数学史上把公元前6世纪至公元前3世纪的希腊数学称为古典时期的希腊数学或前期希腊数学,而把公元前3世纪至公元6世纪称为后期希腊数学.在古典时期,众多数学学派的工作把数学研究推进到了一个崭新的阶段.

## 2.1 爱奥尼亚学派与几何证明

现代意义上的数学,即以演绎证明为基本特征的数学,最早诞生于爱奥尼亚的海滨城市米利都.而享有"希腊科学之父"盛誉的泰勒斯(Thales,公元前636—公元前546)正是在这里创立了古希

腊历史上的第一个数学学派——爱奥尼亚学派.

泰勒斯是一个精明的商人,青壮年时代,他依靠自己的聪明才智,在商场上积累了足够的财富,使他的后半生能够从事游历和研究.据说正是由于泰勒斯从巴比伦、埃及等地带回了数学知识而创建了爱奥尼亚学派.

关于泰勒斯的生平和学术工作虽然没有确切可靠的材料,但下述五个命题的发现是应归功于泰勒斯的:

(1)圆被任一直径二等分;

(2)等腰三角形的两底角相等;

(3)两条直线相交,对顶角相等;

(4)两个三角形,有两个角和一条边对应相等,则这两个三角形全等;

(5)内接于半圆的角必为直角.

然而泰勒斯对数学学科发展的贡献并不仅仅在于他发现了这些定理(比如早在此前大约1400年的古巴比伦人就知道上述第五个命题),更重要的是泰勒斯对它们提供了某种逻辑推理.例如对于"两条直线相交,对顶角相等",泰勒斯是这样证明的:如图2-1,$\angle a$ 加 $\angle c$ 等于平角,$\angle b$ 加 $\angle c$ 也等于平角,因为所有的平角都是相等的,所以 $\angle a$ 等于 $\angle b$(等量减等量,余量相等).这表明,从泰勒斯开始,人们不再仅仅利用直观和实验来寻求数学结论了,换句话说,正是泰勒斯将演绎推理引入了数学.

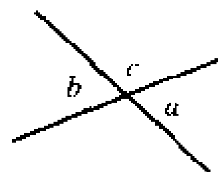


图2—1

以泰勒斯为首的爱奥尼亚学派在哲学特别是自然哲学方面的工作也是无与伦比的,他们肯定在一切表面现象的千变万化之中,有一种始终不变的东西,这一原始物质的内蕴本质是守恒的,而所有的物质形式都可用它来解释.这种理性思维的光辉,正是希腊科学精神的闪光.

## 2.2 毕达哥拉斯学派与"万物皆数"

毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前572~约公元前497)是古希腊哲学家、数学家、天文家和音乐理论家,出身于爱琴海中的萨摩斯岛(Samos,今希腊东部小岛).青年时期,毕达哥拉斯离开家乡,到小亚细亚半岛的米利都向泰勒斯或他的门徒学习几何、哲学,并游历过埃及和巴比伦,尤其在埃及,他学习了很多古代流传下来的天文学和数学知识.40岁左右,他返回家乡.当时正值家乡政局动荡,为摆脱暴政,他便迁居意大利半岛南部的克罗多内(Crotone),在那里组织了一个集政治、宗教、学术三位于一体的学派.该学派政治上代表奴隶主贵族的利益,反对民主派的活动.学派内部实行公有制,一切创造发明归学派首领.该学派的学习内容与数学相关的四个分支为(1)数的绝对理论——算术;(2)数的应用——音乐;(3)静止的量——几何;(4)运动的量——天文.合起来称为四艺,这一名称一直沿用到中世纪.

### 2.2.1 "万物皆数"的数学观

关于毕达哥拉斯学派的数学观,公元前5世纪的哲学家第欧根尼·拉尔修(公元前400~公元前325)有过一段重要的记载:"亚历山大在他的《哲学家师承》中说,他在那些关于毕达哥拉斯的回忆录中发现如下一些信条:万物的本原是单子(monad)或1(unit),由这个单子产生不定的2(dyao or two),由单子和不定的2产生各种数目;由各种数目产生点;由点产生线;由线产生平面图形,由平面图形产生立体图形;由立体图形产生一切可感觉的物体,产生可感物体的四种元素:水、火、土、空气;这些元素互相交换就完全变成另一些物体,它们的组合产生有生命的、精神的、球形的世界."即在毕达哥拉斯学派看来,万物的本原是数,而数是由单子或1产生的.这种把世界万物绝对化地归结为数,且他们观念中的数仅是整数,是完全错误的.以至当其门徒希帕索斯(Hippasus,约公元前

5 世纪)在实践中发现边长为 1 的正方形的对角线不能用整数之比来表示时,大惊失色,并因此遇迫害而身亡. 但这种“万物皆数”观念也从另一侧面强调了数学对客观世界的重要作用,从而包含某种合理因素,是十分可贵的,这是数学化思想的最初表述形式.

毕达哥拉斯的初步数学化思想促进了对自然数的分类研究,他们定义了许多概念. 例如,一个数等于除它本身以外的全部因子之和称之为完全数,小于其因子之和称之为亏数,大于其因子之和称之为盈数. 如 28(=1+2+4+7+14),12(<1+2+3+4+6),10(>1+2+5)分别为完全数、亏数和盈数.

又如,若两个数中任一个数(除本身外)的因子之和都等于另一个数则称为亲和数. 例如 220 与 284 为亲和数,因为 220 的因子之和为(1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=)284,而 284 的因子和为(1+2+4+71+142=)220.

这种初步数学化思想,还促进了他们对数的应用的研究. 例如,在音乐中有同样张力的两根弦,长度为简单整数比时,乐声最和谐悦耳. 据此原理,他开创了音乐理论研究的先河.

### 2.2.2　数形结合的思想

毕达哥拉斯学派许多关于数的规律的发现,都是借助图形的直观分析而得到的. 他们常把数以点的形式排成各种图形,例如,1,3,6 和 10 这些数叫做三角形数,因为相应的点排列成正三角形,例如




并且知道 1,1+2,1+2+3,1+2+3+4+⋯这些和数都是三角形数,第 $n$ 个三角形数是 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 1,4,9,16,

…是正方形数;1,5(=1+4),12(=1+4+7)…是五边形数,第 $n$ 个五边形数是 $(3n^2-n)/2$. 六边形数是 1,6,15,28,…第 $n$ 个六边形数是 $2n^2-n$.

所谓毕达哥拉斯公式,就是通过分析正方形数的图形而建立起来的.其思路是正方形数是由 $n^2$ 个点组合成的方阵,若再加 $2n+1$ 个点,就得到由 $(n+1)^2$ 个点组合成的方阵,即有

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2. \tag{1}$$

如果设 $2n+1=(2m+1)^2$,那么就得到

$$n=\frac{(2m+1)^2-1}{2}=2m^2+2m,$$

即

$$n+1=2m^2+2m+1. \tag{2}$$

(2)代入(1)得

$$(2m^2+2m)^2+(2m+1)^2=(2m^2+2m+1)^2. \tag{3}$$

这就是直角三角形整数边长的公式,人们称为毕达哥拉斯公式.当 $m=1,2,3,4,\cdots$ 时可得满足直角三角形边长的整数组为 3,4,5;5,12,13;7,24,25;9,40,41;等等.

### 2.2.3 科学美学思想

毕达哥拉斯学派认为,"美是和谐与比例",这是他们对科学美所持的基本观点.例如,在对各种自然物体的本质讨论中,他们认为,最美的图形在平面上是圆,在空间是球,整个地球、天体和宇宙是一个圆球,宇宙中的各种物体都作均匀的圆周运动.最完美的数是 10,因为 10=1+2+3+4,并将 1,2,3,4 称为四象.在音乐研究中,他们发现,如果一根弦是另一根弦长的两倍,那么两者发出的音就相差 8 度.他们认为音乐的基本原则是数量原则,音乐节奏的和谐是由高低、长短、轻重各种不同的音调,按照一定数量比例组成的.他们研究了一些美的比和比例关系,提出了算术平均值(以 $M$ 表示)、几何平均值(以 $G$ 表示)和调和平均值(以 $H$ 表示):对 $A,B$ 为两已知数,

$$M=\frac{A+B}{2},\ G=\sqrt{AB},\ H=\frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}}.$$

他们发现，$M:G=G:H$，$A:M=H:B$，称前者为完全比例，后者为音乐比例. 以此为出发点，毕达哥拉斯学派建立了他们的音乐理论.

毕达哥拉斯不仅把“美是和谐与比例”的科学美学思想用于音乐和天文学，还十分广泛地将它应用于建筑、雕刻、地学、生物学、医学等领域.

## 2.3 巧辩学派与尺规作图不能问题

巧辩学派创立、活动于雅典. 这个学派中聚集了各方面的学者大师，如文法、修辞、辩证法、人文，以及几何、天文和哲学方面的学者. 他们研究的主要目标之一是用数学来探讨宇宙的运转. 该学派的名字与著名的尺规作图不能问题是联系在一起的. 所谓三大尺规作图问题是指，只允许用圆规和直尺作一正方形，使其与给定的圆面积相等；给定立方体的一边，求作另一立方体之边，使后者体积两倍于前者体积；三等分任一已知角.

围绕这三大作图问题，希腊数学家们表现出了杰出的数学思想和方法，许多数学成果都是研究这三个问题的副产品，例如，该学派的头面人物希比亚斯(Hippias，约公元前 5 世纪)为解决三等分任意角 $\Phi$ 的问题，引入了一条割圆曲线. 希比亚斯的做法是：

设 $AB$ 顺时针匀速绕 $A$ 点转到 $AD$，同时 $BC$ 平行匀速下滑至 $AD$. 两线交点的曲线便是割圆曲线，如图 2－2 中 $BE'G$.

图 2—2

事实上，若记 $E'(x,y)$，$AB=a$，

则$\frac{\Phi}{y}=\frac{\frac{\pi}{2}}{a}$,或 $y=a\Phi\cdot\frac{2}{\pi}$,或 $y=\frac{2}{\pi}a\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$,即 $y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}$.
这曲线若能作出,就可三等分任一角.

因为可对 $y$ 三等分($E'H'=2H'H$),又过 $H'$ 作 $B''C''/\!/AD$ 交曲线于 $L$,连 $AL$,则$\angle LAD=\frac{\Phi}{3}$.因为$\frac{\angle LAD}{\pi/2}=\frac{HH'}{a}=\frac{y/3}{a}$,又$\frac{\Phi}{\pi/2}=\frac{y}{a}$,$\therefore\angle LAD=\frac{\Phi}{3}$.但该曲线本身也是不能用尺规作出的.

当然探索三大作图问题的并非仅限于巧辩学派.例如,不属于巧辩学派的希波克拉茨(Hippocrates,公元前 5 世纪)在探索化圆为方时,成功地解决了一个把曲边图形化为直边图形的问题:如图 2-3,设一等腰直角三角形 $ABC$,斜边为 $AC$,中点为 $O$,半圆 $AEB$ 以 $AB$ 为直径,则

$$\frac{\text{半圆 }ABC\text{ 面积}}{\text{半圆 }AEB\text{ 面积}}=\frac{AC^2}{AB^2}=2,$$

即半圆 $AEB$ 面积=扇形 $AOB$ 面积.

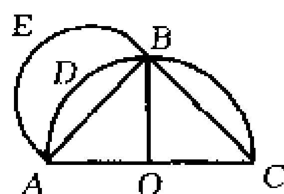


图 2—3

$\therefore$月牙形 $AEB$ 面积=半圆 $AEB$ 面积-弓形 $ADB$ 面积
=扇形 $AOB$ 面积-弓形 $ADB$ 面积
=$\triangle AOB$ 面积.

巧辩学派及其他希腊学者,所以要把作图工具只限于直尺和圆规,反映了他们对数学的这样一个认识:即他们强调在研究一个概念之前必须证明它的存在,只有从真理出发,依靠演绎推理才能获得真理.在他们看来,直线和圆客观上是存在的,所以只有用直线和圆构作出来的图形才能保证在逻辑上没有矛盾.这样的思想一方面促进了希腊数学的严密化,但另一方面也禁锢了人们的思想.2000 多年来,三大问题的研究,花费了人们的大量心血.直至 1831 年,法国数学家万采尔(Vantzal,1814~1848)首先证明倍立

方问题和三等分任意角问题不能用尺规作图来解决，接着德国数学家林德曼(Lindemann，1852—1939)于1882年又证明了 $\pi$ 的超越性，因而否定了用尺规化圆为方的可能性，三大问题才彻底得以解决.

## 2.4 柏拉图学派

柏拉图(Plato，公元前427～公元前347)是希腊数学家、哲学家、教育家，出生于雅典贵族家庭. 公元前407年，柏拉图20岁时曾拜年逾六旬的苏格拉底为师. 他是苏格拉底最杰出的学生，深受苏格拉底逻辑思想的影响.

公元前399年，在苏格拉底被雅典重建的民主政权处死后，柏拉图被迫开始了为期12年的游历生涯，他先后去了麦加拉、埃及等地，后回到了雅典. 公元前387年，柏拉图在雅典创建了欧洲历史上第一所综合性的、传授知识、培养上层统治者的学校，学校兼收女生，进行百科全书式的教育，并实行分层次教育. 例如，数学教育的三个层次是：低层次的数学普及教育；20至30岁的中等层次数学教育；以把握"善理念"为目标的高层次数学教育. 其中在低层次的数学普及教育中，算术和几何是学习的主要内容. 该学派认为，算术是每人必须具备的知识，无论各种学问和技艺都离不了它，几何能使人心灵手巧. 第二层次的数学教育的10年间，学习内容依次为：算术、平面几何、立体几何、天文学、谐音学. 在完成第二层次数学教育后经筛选的人员才有资格接受最高层次的教育. 这一层次的学习内容超越可感的数和图形，不再停留在自明的假设上，而只凭着理性去把握真正永恒不变的实在、理念，直到把握最高的"善理念".

### 2.4.1 数学理念

柏拉图学派对于数学的作用有比较充分的认识. 他们认为："数学研究发展了一个智力机体，并使之运行，这个机体比一千只

眼睛更富有价值，因为单靠它就能够理解真理.”柏拉图还提出：“如果谁不知道正方形的对角线和边是不能用同一单位度量的，那他就不配人的称号.”该学派还强调要用数学来解释宇宙，因而特别重视对立体几何的研究.他们研究了棱柱、棱锥、圆柱、圆锥，而且知道正多面体只有五种.柏拉图学派把德漠克利特(Democritous，公元前460～公元前370)的原子论、毕达哥拉斯的数学成就及恩培多克勒的四元素结合起来，提出了几何学的原子说.他们设想物质世界的本原不是土、气、水和火，而是两种直角三角形，即正方形之半与等腰三角形之半.因为这两种图形是最完美的图形，它们可以无限分下去.因此，神就用它们构成4种正多面体的界面：火微粒是正四面体，土微粒是立方体，气微粒是正八面体，水微粒是正二十面体，最初一切是混乱的，后来它们才被安排好，从而形成了宇宙.

柏拉图学派主张科学的数学化与毕达哥拉斯学派的精神本质上是一致的.但柏拉图学派严格区分数学研究对象和现实中的相应的物理实体.他把数学的研究对象规定为抽象的数和理想的图形，它们属于理念世界.与毕达哥拉斯学派的观点不同的是，毕达哥拉斯认为数是和具体事物相联系的，是有其物质基础的.但在柏拉图看来，数已脱离具体事物，即为所谓的理念.柏拉图完全排斥了毕达哥拉斯对“数”的理解的具体意义和感性成分，而几何学概念是对几何图形的抽象，两者有严格的区别.在柏拉图看来，作为几何学的概念，点是没有大小的，线是没有粗细的，这种理念是那些只有心灵之目才能看到的实在.

### 2.4.2　假设法

在苏格拉底逻辑思想的影响下，柏拉图为了确立理念，明确提出了数学的演绎证明应遵循的逻辑规则.他指出：“首先我假定某个我认为是最有力的假定，然后，我肯定凡与之相符合的就是真的，无论是关于原因还是别的什么，而与之不符合的，我就认为它

是不真的."这里柏拉图明确提出了数学证明是以某些自明的假设即公理作为出发点,然后经过一系列严格的逻辑推理,柏拉图称之为"假设法".这是公理化方法的开端,它对于形成欧几里得几何学的公理演绎系统和推进希腊数学的发展具有极为重要的意义.可以说,这是古希腊方法论的最高成就.这也表明,数学,至少从柏拉图时代起,已经有了公理化方法的思想.

### 2.4.3 形式逻辑

柏拉图学派中最杰出的数学家应首推亚里士多德.亚里士多德(Aristotle,公元前384~公元前322)是柏拉图的学生和同事,出生于马其顿.他的著作涉及物理学、数学、逻辑、气象学、动植物学、心理学、经济学及其他领域.虽然其中讨论的数学问题很少,但其卓越思想对数学的发展有很大影响.亚里士多德探讨了数学的本质,他认为数和形与其他物理性质一样,都是实物的属性,它们是通过抽象思维为人所认识的,但它们从属于实物,故数学讨论的是抽象概念,但它来自实物的属性,这就在数学史上第一次明确提出了数学研究的对象.

亚里士多德从几何出发讨论了数学中的定义、公理和公设.他认为,定义是必须用先于所定义事物的某种东西来表述;定义了的东西是否存在,有待于证明;强调所引用的概念必须彼此没有矛盾,不能用不存在的图形(如正十面体)来建立前后一致的逻辑结构.他把公理和公设加以区别,认为公理是一切科学所公有的真理,而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理.被他列为公理的有矛盾律(指出一个命题不能既是真的又是假的),排中律(指出一个命题必然是真的或者是假的),等量加减等量后结果相等等.他认为,公设无需是不言自明的,但其是否属真应受所推出的结果检验.所列出的一批公理或公设,数目应愈少愈好,只要它们能用以证明所有的结果.他崇尚演绎证明,认为这是确定事实的唯一基础.亚里士多德对于定义、公理、公设、演绎证明的认识对欧几

里得产生了很大的影响,这在欧几里得《几何原本》中人们是不难看到的.

亚里士多德对数学的最大贡献是建立了形式逻辑学.虽然以前已有不少学者奠定了逻辑的基础,但通过他的工作把形式逻辑规范化、系统化,使之上升为一门科学.他提出了矛盾律、排中律等思维的规律;把逻辑学理解为论证的学问;从个别到一般的归纳和从一般到个别的演绎;他还研究了三段论法的格和规则,这些都为数学推理提供了基本的思维工具.

亚里士多德的著作中也有许多重要的几何定理.如多边形外角之和等于四直角,在包围给定面积的所有平面图形中,圆的周长最小等.

## 2.5 欧多克索斯学派与比例论

欧多克索斯(Eudoxus,约公元前400～公元前347)出生于小亚细亚的达奈斯,曾在太兰吐姆向阿尔基塔斯学习过数学,并在埃及游历过,后来在小亚细亚北部的基齐库斯成立了一个学派.公元前368年左右他和他的门徒加入柏拉图学派.

欧多克索斯的最大贡献是创立了纯几何性的比例论.其理论基础有两个:首先他是借助一些公理建立了量的概念.用现代的记法,这些公理是:

(1)若 $a=b$ 与 $c=b$,则 $a=c$;

(2)若 $a=c$,则 $a+b=c+b$;

(3)若 $a=c$,则 $a-b=c-b$;

(4)彼此重合的东西是相等的;

(5)整体大于部分.

欧多克索斯认为量和数是不同的,前者代表连续对象,如线段、面积、体积、角、时间等,后者代表离散对象.他通过定义量的比和比

例,把比例理论推广到不可通约量,从而避免了直接出现无理数,但却生硬地把数与量肢解了开来.其次引入了对等公理(以后被称为欧多克索斯——阿基米德公理):如果能把两个量 $a,b$ 中的任一量自身相加若干多次以后超过另一个量,则 $a,b$ 有一个比.采用这个公理是为了排除以后被称为“非阿基米德量”的无穷小量.例如,过圆上某一点的切线与过该点的圆弧间的角,希腊人称它为“牛头角”,他们认为这角小于任意锐角,但它不等于零.根据对等公理,如果 $a,b$ 两个量中有一个小到不能使其有限倍后超过另一个量,则不允许它们之间有一个比.

欧多克索斯的比例论为处理无理数提供了逻辑依据,这是整个希腊数学中最值得夸耀的理论之一.19 世纪维尔斯特拉斯和戴德金建立的无理数理论,实际是欧多克索斯比例论思想的继承与发展.但它将形与数生硬地割裂开来,使希腊数学由以前重数的倾向,转向重形,以至几何学后来几乎成了全部严密数学的基础,这样的局面一直持续了两千多年.

欧多克索斯的另一贡献是穷竭法.他应用穷竭法证明了两圆面积之比等于其半径平方之比,两球体积之比等于其半径立方之比,棱锥体积是同底同高棱柱体积的 1/3,以及圆锥体积是其相应圆柱体积的 1/3 等.

由上述可知,在希腊数学研究中,人们不再满足于问“如何”(how),而是开始问“为什么”(why).即不但要知其然,而且要知其所以然,唯理性的气氛浓厚起来.以实验和经验为依据的方法,对于解答“如何”这个问题是十分充分的,但要回答更为科学的“为什么”时,就不那么充分了,为了回答这个问题,就得在证明方法上作出努力,于是,演绎推理就显得十分重要了.从泰勒斯到欧多克索斯,几乎每一个学派都在前人工作的基础上进行了新的创造,所有这一切,都为欧几里得、阿基米德等人开创希腊数学的辉煌做好了准备.

## 3 亚历山大时期的三巨匠

早期数学的进程在很大程度上取决于人类历史的进程．在马其顿征服希腊各城邦后不久，国王腓力二世遇刺去世，其子亚历山大（公元前336－公元前323年在位）继位，从公元前334年起，亚历山大举兵东征，建立了一个空前庞大的帝国．公元前323年，亚历山大病逝，其帝国被部将分割为安拉哥拉（欧洲部分）、塞流卡斯（亚洲部分）和托勒密（埃及部分）三个王国，历史上称之为希腊化国家，希腊数学从此进入亚历山大时期．

亚历山大城位于埃及北部海岸，是托勒密王国的首都，经历代托勒密国王的经营，成为当时整个地中海地区最大的城市．在这里兴建了藏书达七十万卷的图书馆，国家设立了研究机构，其研究人员由国家供养．优秀数学家云集于此，亚历山大学派由此产生．

亚历山大的东征，客观上促进了东西方文化的融合，数学由此产生了新的生长点．这个时期的数学发展有两个方向，其一是沿着毕达哥拉斯、柏拉图开辟的方向，继续致力于纯粹数学理论的研究，并使之系统化，其代表人物有欧几里得（Euclid）、阿波罗尼斯（Apollonius，公元前262－公元前190）；其二是以阿基米德（Archimeds，公元前287－公元前212）为代表，致力于研究数学与天文、物理、力学、光学等学科的结合，在继承古典时期研究成果的基础上，不断开拓新的领域．其中阿基米德、欧几里得、阿波罗尼斯并称亚历山大时期的三大数学巨人．

## 3.1 欧几里得与《几何原本》

### 3.1.1 欧几里得的生平及其著述

欧几里得大约出生于公元前360年的雅典，曾受教于柏拉图学院，雅典衰落后，应托勒密国王的邀请，在亚历山大城从事数学工作.

他是一位温和仁慈的蔼然长者，学生们很尊敬他.他严谨治学，不图名利，据说有一个学生刚学完第一个几何命题，便问先生学了几何后将得到什么好处，欧几里得幽默地对侍者说："拿三个钱给这位先生，因为他想在学习中获取实利."

欧几里得是一位勤奋的学者，他以满腔热情决心将以雅典为代表的希腊数学成果，运用欧多克索斯曾经部分采用过的严密的逻辑方法重新编纂成书.为此，他首先收集、整理已有的数学成果，以命题的形式作出表述，完善前人的各种定理并给予重新证明，使其达到无懈可击的地步.然后，他作出了自己的伟大创造：对定义进行筛选，选择出具有重大意义的公理，逻辑地、严密地按演绎方式组织命题及其证明，最后形成了具有公理化结构和严密逻辑体系的《几何原本》.它是在公元前300年左右完成的，此书被称为希腊数学的伟大的百科全书.

欧几里得除编著《几何原本》以外，还写了许多其他出色的著作.他对天文学和光学都有研究，但在纯数学方面保留下来的仅有两本：

(1)《数据》(The data).这是在《几何原本》基础上进一步研究几何学的一本问题集，共95个问题.

(2)《论图形的分割》(On divisions of figures).研究将图形分割后成比例的问题，共有36个问题.

欧几里得的《几何原本》的原稿早已丢失，现有的是4世纪泰恩的修订本和一个希腊文手抄本.

《几何原本》共13卷,卷1除了列举基本的定义和公理、公设外,主要论述各种直线形;卷2用几何方法论述代数恒等变形;卷3、4讨论圆、正多边形及其有关性质;卷5、6讨论比例论和相似形;卷7、8、9专门讲数论;卷10处理无理量;后3卷讨论立体几何.欧几里得之后,有人将关于正多面体的研究列为《几何原本》的卷14、15,因此,《几何原本》又有15卷之说.

### 3.1.2 《几何原本》理论体系的特点

1)封闭的演绎体系

从《几何原本》的逻辑结构来看,它是一个演绎体系.欧几里得把数学从古埃及、古巴比伦时的一门经验科学转变成了具有一般理论性程度的演绎科学.它的基础结构是选择少量原始概念和不需要证明的几何命题作为定义、公理、公设,使之成为全部几何学的出发点和逻辑依据,然后运用逻辑推理演绎出其余的所有几何命题.不过,《几何原本》在证明某些命题时,运用了公理和逻辑推理之外的"直观",这也正是《几何原本》的缺陷所在,但并不影响体系的大局.

这种演绎的思想根源在于:古希腊人认为自然界是有秩序的,并且始终按照一定的规律运行,人们不仅可以探求自然界的底蕴,还可预测它的将来.这种愿望为以后的几何发展成一个演绎体系提供了极大的可能性.

从《几何原本》的理论发展形式来看,它是一个封闭的体系.它的理论体系是独立于社会生活而展开的,几乎完全回避了与现实生活有关的应用问题,因而对于社会生活的各个领域来说,它具有封闭性.同时,《几何原本》除所用的逻辑规则外,具备了其理论推导的所有前提,因此它是一个封闭的体系.

2)抽象化的内容

在《几何原本》中,欧几里得一开始就从古代的量地术和关于几何形体的原始直观中,用抽象分析方法提炼总结概括出23个基

本定义、5 个公设和 5 个公理，由此出发演绎出当时的全部几何知识. 因此《几何原本》中涉及的一般都是抽象的概念和命题. 它所探讨的是概念和命题之间的逻辑关系. 如在《几何原本》中研究了"所有的"矩形的性质，但不研究任何一个具体的矩形度量；《几何原本》研究了数(自然数)的若干性质，在研究中，用线段来表示抽象的一般的"数"，然后用演绎推理来研究其性质，但一点也不涉及具体的数的计算及其应用.

3)公理化方法

《几何原本》所采用的体系是比较严格的演绎体系，通常把这个体系称为公理体系，而构造体系的方法是就公理化方法.《几何原本》共给出 475 个命题，其中卷 1 给出的 5 个公设、5 个公理是全书其它命题的基本前提. 每卷的开头都给出本卷中所需的概念，共 119 个，其中包括像"点"、"线"等不加定义的原始概念. 从现代实质公理法对概念的要求来看，除还缺少一些必要的不加定义的概念及个别定义不确切外，基本上是符合的. 从全书来看，定理的引入也是有序的，后面的定理可以利用前面的定义、定理作为证明依据，除个别定理的证明有错误或不严格外，大部分证明也符合现代公理法的要求.

以上的三个特点是相辅相成的，抽象化的内容适合演绎体系，面演绎证明的产物就是抽象命题，公理法适合于应用到抽象的内容中，由公理法得到的理论体系必然是一个演绎体系. 与《几何原本》的其他方面相比，公理化方法尤为重要，影响十分深远，它是人们用公理法建立一切现代演绎系统的样板，为后来的数学以至科学的发展作出了示范，这也是《几何原本》的最大贡献.

### 3.1.3 《几何原本》的主要缺陷

1)没有原始概念或不定义概念

一个公理系统都有若干基本概念或不定义概念，欧几里得却试图对所使用的一切概念都予以定义. 例如，他把点定义为"没有

部分的东西"等,而部分又是什么?还必须定义.这样定义下去,是没有穷尽的,从而不能建立严格的数学体系.

2)有些定义含混不清

例如"直线是同其中各点看齐的线","平面是与其上直线看齐的那种面"等等.什么是"看齐"?含混不清,难以理解.

3)公理、公设的选定有明显的不足

在《几何原本》的五个公设中,"凡直角皆相等"这一公设是多余的,从头至尾没用过.此外没有运动公理、连续公理和顺序公理.如果没有运动公理,则用叠合法证明图形全等就没有逻辑依据;缺乏连续公理,则两条线交点的存在性也得不到保证;而没有顺序公理,将会导致许多悖论.例如,可以得出"任意三角形都是等腰三角形"、"直角等于钝角"等等.

4)运用直觉

《几何原本》所给出的很多最基本的定义完全不是逻辑意义下的定义,而只是以几何形象的直觉描述.例如"线是有长度而没有宽度"等,要从这种定义逻辑严密地引出任何推论是不可能的,而且,在以后的论断中,它们只能是如何运用直觉观念的一些说明而已.又由于公理、公设的不足,以致有些定理的证明只能依赖于直觉,如在卷1命题21题的证明中,凭直觉肯定如果一条直线从一个三角形的一个顶点进入该三角形,必交其对边.

### 3.1.4 《几何原本》的文化意义和社会功能

《几何原本》所代表的欧氏几何体系对人类文化发展有着重要意义.这部著作自诞生以来,在长达2000年的时间里一直盛行不衰,为学术界文化界所称道.它历经多次翻译、改编,印刷达千余版,虽然在印刷数量上《几何原本》比《圣经》少些,但是它超越种族、宗教、信仰、文化意识而被人们广泛接受的程度,却是《圣经》无法与之相比的.

1)为人类文化注入理性精神

《几何原本》除了 475 个命题之外，集中展现了希腊数学所奠定的数学思想、数学精神，而公理方法的引入则是数学精神的核心和灵魂. 这种方法既能保证命题的正确性，又能弥补人类经验的不足，并为理论的发展提供了一种有效的形式，从此以后，人们开始靠理性，而不是凭感官来判断是非曲直，《几何原本》所孕育的这种理性精神，成为独特的文化珍品.《几何原本》不仅对希腊文化发展产生了重要作用，而且在文化交流中起到了为其他文化注入理性精神、数学精神的作用，它对人类文化产生的深远影响是其他著作难以相比的. 人们发现，欧氏几何庞大的几百个命题的证明，仅是从几条极为简单的原理推导出来的，这些大量深奥的演绎结果，使得古希腊人和以后的世界各地的人们了解到了理性的力量，从而增强了人们利用理性力量获取成功的信心，人们大胆地把理性因素运用于自然界、人类社会、思维心理学等各个领域，理性精神已几乎渗透到人类文化的一切领域.

2)文化教育作用

在人类文化教育中，欧氏几何一直是最基本的组成部分，这也是《几何原本》对人类文化产生重要影响的基本原因. 人们把欧氏几何在训练思维、培养逻辑推理能力、空间想象能力方面的作用誉为“脑体操”. 柏拉图学院的名言就是“不懂几何不得入内”. 无论在中世纪训练神学家，还是在近、现代的义务普及教育中，无论为造就文学艺术家、经济和社会管理人员，还是为了培养科学家、工程师，欧氏几何在基础教育中依然占据着基本的不可替代的地位，尽管数学教育已远远超出了几何教育的范围，并且今天学生们用的课本也远非《几何原本》，但欧氏几何在教育中的基本作用，依然是巨大的.

3)德育教育作用

古希腊伟大学者柏拉图曾做过《数学与善》的讲演，强调了须将真善美统一于几何学之中. 在 2000 年后，我国的徐光启再次强

调几何学的道德教育功能,他认为:"此书有五不可学:躁心人不可学,粗心人不可学,满心人不可学,妒心人不可学,傲心人不可学.故学此者不止增才,亦德基也."通过几何学习,看到从少数已知公理、条件出发,可以导出无穷无尽的问题待人们去求证、探索,由此使人明白"已知的只是沧海一粟,未知的却似浩瀚宇宙"之理,一生必须勤学不止.因此,几何学与培养人的道德情操结合在一起,可以使人至善.

## 3.2 数学之神阿基米德

阿基米德是有史以来世界最伟大的数学家之一.近代数学史家贝尔(1883~1966)是这样评论阿基米德的:任何一张开列有史以来三个最伟大的数学家的名单中,必定会包括阿基米德,而另外两位通常是牛顿和高斯.不过,"以他们的丰功伟绩和所处的时代背景来对比,拿他们影响当代和后世的深邃久远来比较,那么我们首推的还应该是阿基米德."

### 3.2.1 阿基米德的生平和成就

公元前287年,阿基米德生于意大利西西里岛的叙拉古.从公元前5世纪起,西西里岛成为希腊人的领地,在阿基米德时代,这里已经十分希腊化,科学史上常把它作为希腊的一部分来对待.据阿基米德《沙粒计》一书序言记载,他的父亲是天文学家.母亲出生于名门望族,且知书达理.青年时代的阿基米德曾到号称"智慧之都"的亚历山大城求学,当时亚历山大的学术空气较为自由,学生们可以自由地选择内容听讲并参加讨论和研究.这里的科学研究包括四个方面:文学、数学、天文学和医学,由于希腊天文学实际是一种数理天文学,以天体运动的数学设计为其主要内容,而医学和占星术也含有数学,故数学在亚历山大占有主导地位.在亚历山大期间,阿基米德系统地阅读了欧几里得的《几何原本》,研究了古希腊时期巧辩学派代表人物的著作及安提丰(公元前430年)等人关

于三大几何问题讨论的种种方法，特别是安提丰和欧多克索斯的穷竭法对阿基米德影响最为深刻，以致后来发展成为他处理无限问题的基本工具.

阿基米德学成后返回故乡，并终身保持同亚历山大学派的联系，常与数学家埃拉托塞尼(Eratosthenes)、卡农(Conon)等人书信往来，研讨学问，成为亚历山大学派最杰出的代表. 他一直住在叙拉古. 公元前 212 前，罗马人在其统帅马塞路斯(Marcellus)的率领下围攻叙拉古，由于叛徒出卖，罗马人趁叙拉古人庆祝女神节的狂欢之夜，攻占了城市，阿基米德死于士兵剑下，临死前他还在思考几何问题. 对此，哈密顿(Sir William Rowan Hamilton)曾评论道："谁不认为阿基米德的名声比他的战胜者马塞路斯的名声高?"

阿基米德的数学著作流传至今的，按时间顺序，依次为：《抛物线的求积》、《论球和圆柱》、《论螺线》、《论劈锥曲面体与球体》、《圆之度量》、《沙粒计》，这些论著无一不是数学创造的杰出之作，正如英国数学史家希思(T Heath，1860～1941)所指出的，这些论著"无一例外地都被看作是数学论文的纪念碑. 解题步骤的循循善诱，命题次序的巧妙安排，严格摒弃叙述的枝节及对整体的修饰润色. 总之，给人的完美印象是如此之深，使读者油然而生敬畏的感情."这些著作对数学的贡献主要有：

1)平面几何方面

①开创计算 $\pi$ 值的古典方法，利用内接和外切正多边形逼近，求得

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

②证明圆面积等于以圆周长为底、半径为高的三角形的面积.

③证明任何直线截抛物线所得弓形面积等于同底等高的三角形面积的 4/3.

④定义了螺线 $\rho=a\theta$，并证明螺线第一圈与初始线所围成的面

积等于半径为 $2\pi a$ 的圆面积的 1/3.

⑤椭圆与圆的面积之比等于椭圆长短轴之积与圆半径平方之比.

2)立体几何方面

①球表面积等于大圆面积的 4 倍.

②圆的外切圆柱体的体积是球体积的 3/2,其表面积(包括上下底)也是球表面积的 3/2.

③任一正圆柱侧面积等于以圆柱高与底面直径的比例中项为半径的圆面积.

④任一圆锥的表面积等于以圆锥母线与底面半径的比例中项为半径的圆面积.

⑤球冠侧面积等于以其大圆弧所对弦长为半径的圆面积.

⑥椭圆、抛物线和双曲线绕轴旋转而生成的旋转体体积公式.

此外,阿基米德还研究了等比级数求和公式、大数的记数法等等.

阿基米德在力学方面的贡献也是相当杰出的.他是古希腊绝无仅有的应用实验进行力学研究的人,因而也是这门学科当之无愧的创始人.杠杆和重心理论的建立是阿基米德在力学上的一个重要贡献,这方面的著作尚存的是《力的平衡》,记载了由一些基本假设出发而对杠杆定理作出数学推导以及关于各种形状物体重心的求法.利用杠杆定律,阿基米德正确解释了杠杆省力的原理,他还进一步指出:只要适当地加长动力臂,那么就可以把不管多重的物体举起来,为了强调这一点,阿基米德甚至说:“只要给我一个可靠的支点,我可以移动地球.”当然,这实际是不可能的,因为,即使把地球移动 0.01 毫米,那他为扳动杠杆所需在太空中画出的大弧长为 1000 万亿千米,这么远的距离,就连光也得走 100 多年.在流体静力学中,有以他名字命名的阿基米德原理:浸没在水中的物体重量的减少等于它所排开水的重量,其成果集中反映在他的《浮体

论》一书中.

### 3.2.2 力学探索法及其思想

阿基米德是应用力学方法进行数学规律探索的倡导者和典范.在他的一篇题为《方法论》的手抄本中,他断言"力学便于我们发现结论,而几何则能帮助我们对结论作出证明".这一手抄本是海伯格(Heiberg)1906年在君士坦丁堡发现的,那是阿基米德给埃拉托塞尼的一封信.阿基米德用力学方法探索数学结论的基本思想是:为了找出所求图形的面积和体积,可将它分成很多窄的平行条和厚的平行层,接着,将这些条或层挂在杠杆的一端,使它平衡于体积和重心为已知的图形,利用杠杆平衡原理及已知图形的面积、体积,便可探求出未知图形的面积和体积来.

阿基米德在这篇著作中应用力学探索方法确定了球体积,抛物线弓形面积,以及椭球体、抛物线旋转截体和球缺的体积.下面以球体积和抛物线弓形面积为例,说明阿基米德在《方法论》中阐明的这种力学探索方法的基本思想:

1)球体积公式

设有半径为 $r$ 的球,圆锥和圆柱的高都是 $2r$,底面半径分别是 $2r$ 与 $r$.图 3-1 是它的轴截面图.考虑在三个立体上切下与 $N$ 的距离为 $x$,厚为 $\Delta x$ 的薄片,其近似体积为

球体:$\pi x(2r-x)\Delta x$

柱体:$\pi r^2\Delta x$

锥体:$\pi x^2\Delta x$

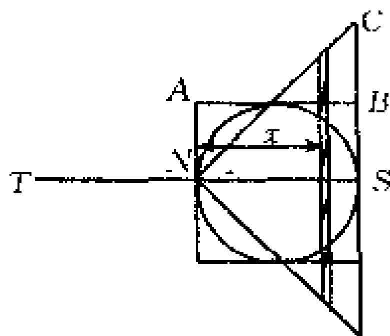


图 3—1

阿基米德将球体和锥体的薄片挂在 $T$ 点($TN=NS=2r$)上,则它们关于支点 $N$ 的组合矩为

$$[\pi x(2r-x)\Delta x+\pi x^2\Delta x]2r=4\pi r^2 x\Delta x.$$

上式右端却为柱体切下来的薄片放在左边与 $N$ 的距离为 $x$ 处的矩的四倍. 把大量的这些薄片加在一起得

$$2r[V_{球}+V_{圆锥}]=4rV_{圆柱},$$

即　$2r[V_{球}+\frac{8\pi r^3}{3}]=8\pi r^3$,　故 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$.

2)抛物线弓形面积

设有以 $AC$ 为弦的抛物线弓形,要求它的面积. 记 $P$ 是抛物线上的点,$OPM$ 与 $AF$ 均为平行于抛物线轴的直线,$CF$ 与抛物线相切于 $C$ 点,又记 $K$ 为 $AF$ 的中点,在 $CK$ 延长线上取 $H$ 使 $KH=CK$. 阿基米德取 $K$ 为支点,并置 $OP$ 于点 $H$ 上,让 $OM$ 还留在原处. 接着他根据抛物线几何性质

$$OP/OM=AO/AC$$

得　$OP/OM=KN/KC=KN/HK$,

亦即　$OP\cdot HK=OM\cdot KN$.

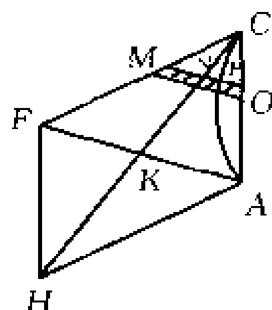


图 3—2

这说明,以 $K$ 为支点,$OP$ 在点 $H$ 处将与 $OM$ 平衡,这一情况,对 $O$ 在 $AC$ 上所有位置都成立. 因为 $\triangle AFC$ 由所有的类似于 $OM$ 的线段组成,以 $AC$ 为弦的抛物线弓形由所有类似 $OP$ 的线段组成. 因此,当抛物线弓形的重心够到 $H$ 位置上时,将与现在位置的 $\triangle AFC$ 平衡(以 $K$ 为支点). 而 $\triangle ACF$ 的重心位于 $CK$ 上距 $K$ 的 1/3 处,故

$$S_{AC为弦的弓形}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACF}.$$

力学方法作为数学发现的有力工具,具有强大生命力,对此阿基米德有着深的刻的认识,在前面提到的那封信中,他预言:“一旦这个方法确立之后,有些人,或者是我们的同代人,或者是我们的后继者,就会利用这个方法又发现另外一些定理,而这些定理是我没有想到的.”2000 年后,阿基米德的预言被证实了. 18 世纪中叶,

丹尼尔·贝努利由物理推测得到了三角级数形式的弦振动的微分方程的一般解. 19 世纪中叶,黎曼由电学理论确定在每一个封闭的黎曼曲面上都存在着与通常有别的代数函数.

### 3.2.3 对穷竭法的妙用

阿基米德关于圆的著作发表在单行本《圆的度量》中,全篇包括三个命题:(1)用"穷竭法"证明了圆积公式;(2)断言圆与它的外切正方形面积之比为$\frac{11}{14}$;(3)推算出圆周率在$3\frac{10}{71}$和$3\frac{1}{7}$之间.

阿基米德的命题 1 表述为圆的面积与一个两条直角边分别等于其周长和半径的直角三角形的面积相等. 他用穷竭法处理该命题的基本思想是:先估计圆的面积 $A$ 等于该特定三角形的面积 $K$,然后分别证明 $A$ 不能大于 $K$ 也不能小于 $K$. 当正多边形的边数加倍时,它与原来正多边形面积之差总是大于原来正多边形与圆积之差的一半. 在有限的步骤中,正多边形与圆的面积之间总有一个剩余量,一旦这个剩余量达到充分小而引起逻辑上的矛盾,倍边的过程即告终止. 其具体过程如下:

设$\odot O$ 为给定的圆,$K$ 为满足条件的三角形.

(1)若圆的面积不等于 $K$,而大于 $K$. 作圆内接正方形 $ABCD$,等分$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{DA}$,然后再等分这些弧的一半,如此继续下去,直到得到这样一个多边形,使圆与它之间的部分(若干个全等的小弓形)的面积比圆的面积与 $K$ 的差要小,即该多边形的面积大于 $K$.

设 $AE$ 是该多边形的一边,$ON$ 是边心距. 显然 $ON$ 小于圆的半径,即该三角形的一直角边,同时多边形的周长也小于圆周,即该三角形的另一直角边. 那么多边形的面积小于 $K$,导致了矛盾. 因而圆面积不可能大于 $K$.

(2)若圆面积小于 $K$. 作圆的外切正方形,等分每相邻两切点如 $E$,$H$ 间的弧,并过分点如 $A$ 作切线. 因为$\angle TAG$ 为直角,所

以 $TG > GA = GH$. 则 $\triangle FTG$ 的面积大于四边形 $TEAH$ 的一半. 类似地,如果平分 $\overset{\frown}{AH}$ 并过分点作切线,则可从 $\triangle GAH$ 中截去一个大于相应四边形之半的三角形.

继续这一过程,将得到这样一个多边形,它和圆之间的部分(若干个全等的曲边三角形)比 $K$ 与圆的差要小. 即该多边形的面积小于 $K$. 另一方面,因为多边形的边心距等于圆的半径,周长大于圆周,所以该多边形的面积大于 $K$,又出现矛盾. 因而圆面积不可能小于 $K$.

综上可知,圆面积必等于 $K$.

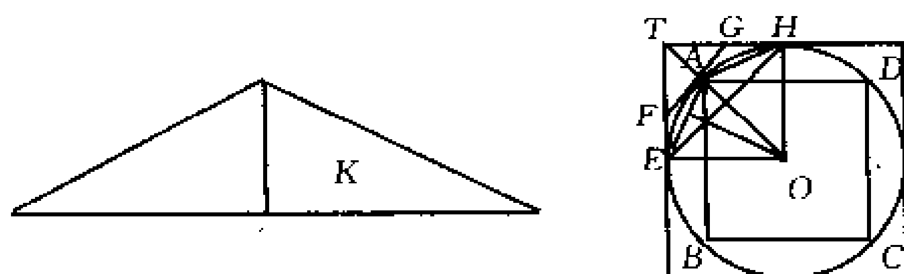



图 3—3

在上述证明中,阿基米德的穷竭法的核心是《几何原本》卷 10 命题 1:"从一个量中减去大于其半的量,再从余量中减去大于该余量一半的量,如此继续下去,总可以使最后的余量小于已知的任何小量."由于阿基米德出色地运用这一命题解决了许多复杂的面积、体积问题,现在就把它的等价形式称为阿基米德连续公理.

阿基米德巧妙应用穷竭法的另一事例是抛物线弓形求积问题.

如前节所述,阿基米德已成功地应用力学方法猜测了球体积和抛物线弓形面积公式,但他并不把这种方法当作证明,阿基米德为其作出严格证明所应用的方法正是穷竭法.

设弧 $ACB$ 为抛物线弓形, $L$ 为 $AB$ 的中点, $LC$ 为平行于抛物线轴的直线且交抛物线弓形弧于 $C$,又 $M$, $N$ 分别是 $BC$, $CA$ 的

中点，且过这两点平行于抛物线轴的直线 $ME$，$ND$ 分别交抛物线弓形弧于 $E$，$D$，阿基米德根据抛物线的几何性质，首先证明：

$$S_{\triangle CDA}+S_{\triangle CEB}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

若记 $S_{\triangle ABC}$ 为 $A_1$，并重复地应用上述结果，则抛物线弓形就可用在 $\triangle ABC$ 上添加一系列三角形来逼近，即

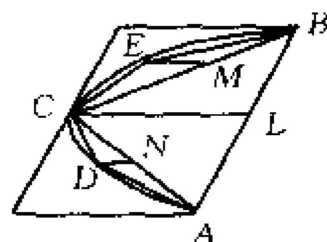



图 3—4

$$S_{\triangle ABC}+\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{4^2}S_{\triangle ABC}+\cdots$$
$$=A_1+A_2+A_3+\cdots.$$

阿基米德证明了，以 $\frac{1}{4}$ 为公比的几何数列的前 $n$ 项有：

$$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n+\frac{1}{3}A_n=\frac{4}{3}A_1. \qquad (*)$$

若记抛物线弓形面积为 $A$，他还证明了 $A$ 不可能大于 $\frac{4}{3}A_1$. 这是因为若 $A>\frac{4}{3}A_1$，那他可取一组（有限个）三角形，使其和与弓形面积之差小于任何一给定的量，因此可使和 $S$ 大于 $\frac{4}{3}A_1$，即

$$A>S>\frac{4}{3}A_1.$$

若 $S$ 有 $m$ 项，则

$$(A_1+A_2+\cdots+A_m)+\frac{1}{3}A_m=\frac{4}{3}A_1,$$

或 $S+\frac{1}{3}A_m=\frac{4}{3}A_1$. 即 $S<\frac{4}{3}A_1$，而产生矛盾.

同样，若 $A<\frac{4}{3}A_1$，则 $\frac{4}{3}A_1-A$ 是一确定的数. 由于阿基米德所作的三角形是愈来愈小的，故有这样一系列内接三角形，它们是 $2_{m-1}$ 个三角形之和即 $A_m$，且有

$$\frac{4}{3}A_1-A>A_m.$$

据(*)应有 $A_1+A_2+\cdots A_m+\frac{1}{3}A_m=\frac{4}{3}A_1$.

或 $\frac{4}{3}A_1-(A_1+A_2+\cdots A_m)=\frac{1}{3}A_m$.

即 $\frac{4}{3}A_1-(A_1+A_2+\cdots A_m)<A_m$.

故 $A_1+A_2+\cdots A_m>\frac{4}{3}A_1-A_m>A$.

这与内接三角形面积之和小于弓形面积矛盾.因此

$$A=\frac{4}{3}A_1.$$

虽然"穷竭法"在欧几里得《几何原本》中已有记载,欧几里得在证明卷12命题2"两圆面积之比等于其直径之比"时就用了穷竭法,甚至更早的还可追溯到欧多克索斯,但是任何人都难以否认这样的事实:阿基米德对穷竭法的运用代表了古代用有限方法处理无限问题的最高水准,其手法的精妙,确实令后人惊叹.M.克莱茵曾评价道:"他(阿基米德)的严格性比牛顿和莱布尼兹著作中的高明得多."莱布尼兹也说:"了解阿基米德与阿波罗尼斯的人,对后代杰出人物的成就就不会再那么钦佩了."

不过,对穷竭法需要指出两点,一是穷竭法虽然本质上是用有限方法处理无限问题,但这和极限方法截然不同.以阿基米德圆面积公式的证明为例,在这一证明中,虽然他也是用内接、外切正多边形来逼近圆,但却没有实际计算这些多边形的面积和估算它们与圆的面积之差,又未涉及无限过程,只是说明了在有限步骤内会出现这样的多边形,它与圆的面积之差将小到引起某种逻辑上的矛盾,故穷竭法中既没有序列及其逼近度的计算,也无涉及无限过程的思考,因此,它与极限方法有着本质的差异.此外,穷竭法不能作为一种发现新结果的工具,仅是与双重归谬法结合起来,作为证明预先估计到的结果的一种手段.二是穷竭法产生于古希腊是与某种哲学背景相关联的.众所周知,古希腊数学与哲学有密切的关

系，当毕达哥拉斯学派发现了不可公度量，巧辩学派提出了关于无穷小的辩难之后，数学和哲学就同时面临危机. 因而，尽管巧辩学派的安提丰早就指出圆内接正多边形的面积随着边数的无限增加而趋近于圆面积，但在恪守形式逻辑法则的正统派数学家眼里，妄想论证这一命题是不可能的. 欧多克索斯正是为了避免不可公度量和无穷小的困难，提出了这一完全建立在有限的直观基础上的"穷竭法"的，同样，阿基米德对圆面积公式的叙述，采用了复杂的几何叙述方式，考虑的也是为了对不可公度量的回避.

### 3.2.4 运动观点和微小三角形

将运动观点引入数学，是阿基米德数学思想的重要组成部分，这集中反映在《论螺线》一书中. 在这本书中，阿基米德从运动观点出发指出了螺线的定义，他说："在平面上有一直线，把它的一个端点固定，使直线围绕定点作匀速运动，如果直线上有一点同时从定点开始，沿直线作匀速运动，那么动点最后将描出一条螺线."用我们熟知的极坐标刻画，其方程即为 $\rho = a\theta$. 阿基米德对螺线的定义，其思想方法在古代数学中是独树一帜的.

运动观点的运用，又体现在寻求螺线切线的一般性方法上. 在阿基米德之前，欧几里得曾在《几何原本》中给出了圆的切线概念为"与圆仅接触于一点的直线". 对切线求法，欧几里得指出："通过圆直径一端垂直于直径的一条直线，且在这直线和圆周之间的空间内不能再插入另一条直线."显然，这仅适用于圆，对圆以外的曲线很难奏效. 阿基米德的《论螺线》记录了寻找曲线切线的第一个一般性的方法. 设螺线的切线 $FT$ 切于 $P$，他把问题归结为确定次切线 $OT$ 相应的量. 由题设，$\angle POT = \frac{\pi}{2}$，阿基米德证明了 $\angle OPT < \frac{\pi}{2}$. 并考察：以 $OP$ 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{PR}$ 及边 $FP$，$FR$ 为边的微小三角形. 当 $\angle ROP = \Delta\Phi$ 足够小时，可以认为微小三角形与三角形 $OPT$ 相似，故

$$\frac{FR}{PR}=\frac{OP}{OT},$$

记 $OP=\rho, PR=\rho\Delta\Phi$，$FR=\Delta\rho$，

则上述结果为$\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\Phi}=\frac{\rho}{OT}$.

因为 $\rho=\Phi$（$\rho=a\Phi$ 中取 $a=1$），则

$$OT=\rho^2，或者\ OT=\rho\Phi.$$

F Q R O P M T

图 3－5

上述处理过程中的杰出创造是微小三角形 $FPR$ 的引入，它本质上类同于微积分中的微分三角形．阿基米德的这一例子，是希腊几何中可以找到的蕴育微分法的为数不多的最为优秀的事例之一．事实是，当 17 世纪创立微积分时，阿基米德的这一思想在帕斯卡、巴罗和莱布尼兹那里得到了进一步发展，而且成为把握微分概念和方法的关键．托里拆利、瓦利士甚至认为，阿基米德已经发现了当时他们所追求的微分方法，只不过这些古希腊数学家为了隐瞒这些新方法而故意用古典形式来加以掩盖罢了．

## 3.3　阿波罗尼斯与《圆锥曲线》

亚历山大时期三位巨匠中的最后一位是出生于小亚细亚西北部的城市柏加（Perga）的阿波罗尼斯（Apollonius，约公元前 262～公元前 190）．青年时代的阿波罗尼斯曾客居亚历山大城，追随欧几里得的学生学习数学．他写过多部数学著作，但以《圆锥曲线》最为成功，是古希腊继《几何原本》之后的又一部力作．

《圆锥曲线》共 8 卷，有 487 个命题，现存前 7 卷．第 1 卷给出了圆锥曲线的定义和基本性质，在这一卷中，阿波罗尼斯首创了通过改变截面的角度，从一对对顶圆锥得到三种圆锥曲线的方法，并依据曲线的作法推导出它们的特征关系式，进而导出了圆锥曲线的弦、直径、共轭直径、切线等的定义和性质，甚至还得到类似于在坐标变换下曲线性质的不变性的结论．需要指出的是，阿波罗尼斯

的方程是用几何语言叙述的.

第 2 卷讨论双曲线渐近线的作法、性质和共轭双曲线的性质;圆锥曲线的直径和轴的求法;有心圆锥曲线的中心的概念;怎样求作满足某种条件的圆锥曲线的切线.

第 3 卷讨论了切线与直径所围成的图形的面积;极点和极线的调和性质;椭圆和双曲线的焦点的性质.

第 4 卷讨论了极点和极线的其他性质;讨论了圆锥曲线相交的各种情况;证明了两条圆锥曲线至多有 4 个交点.

第 5 卷在尚存 7 卷中最富独创性,讨论了从一点到圆锥曲线所能作的最长和最短线段,并给出了过一定点的法线的作图和计算.

第 6 卷讨论了圆锥曲线的全等、相似和圆锥曲线弓形的作图和性质.

第 7 卷讨论有心圆锥曲线的两条共轭直径的性质.

从以上介绍的内容来看,《圆锥曲线》内容广泛,解释详尽,比目前所见到的这方面的大多数著作都要完善得多.

此外据记载,阿波罗尼斯的著作还有:《论比例截点(或截线、截面)》、《论特殊截点(或截线、截面)》、《论确定的截点(或截线、截面)》、《论相切》、《论斜向》和《平面轨迹》,但只有第一种有阿拉伯文本流传下来.

## 3.4 三巨匠以后的希腊数学

虽然希腊数学自阿波罗尼斯之后开始走下坡路,但在后来的岁月里也还是有一些数学成就值得人们去研究的.

其中代数的重大进展是产生了代数符号.第一次系统地提出代数符号的是丢番图,他是希腊化了的巴比伦人,其主要著作《算术》,堪称古代数学的典籍,共 13 卷.在这部著作中,丢番图引入了

表示未知量的 1～6 次幂的符号. 例如 $\delta$,$\Delta\widetilde{V}$,$K\widetilde{V}$ 分别为未知量的一、二、三次幂,$\Delta\Delta\widetilde{V}$,$\Delta K\widetilde{V}$,$KK\widetilde{V}$ 分别为未知量的四、五、六次幂,未知量的负一、二次幂为 $\delta\widetilde{K}$,$\Delta\widetilde{V}\widetilde{K}$ 等等.

丢番图还是该时期解代数方程的大师,在《算术》中,绝大多数问题是不定方程,考察的范围是 1～4 次,在解题时,丢番图经常以高超的技巧利用公式

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y).$$

例如:"对给定的两个数加上一个数,使得这两个数中的每一个数都成为平方数."即

$$\begin{cases}x+a=y^2,\\ x+b=z^2.\end{cases}$$

丢番图取 $a=2$ 和 $b=3$,构成差 $(x+3)-(x+2)=1$,并且找出两个乘积等于这个差的数,他取 4 和 1/4,进而设

$$x+2=\left(\frac{4-\frac{1}{4}}{2}\right)^2,\text{或 } x+3=\left(\frac{4+\frac{1}{4}}{2}\right)^2,$$

由此得 $x=\frac{97}{64}$.

这个方法把差 $b-a=z^2-y^2$ 演变为 $b-a=(z+y)(z-y)=uv$,然后,把 $u,v$ 并列写出:$u=z+y,v=z-y$,由此得

$$z=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2},$$

即

$$x+a=\left(\frac{u-v}{2}\right)^2,\ x+b=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2.$$

托勒密在总结希帕恰斯(约公元前 190～公元前 125)和梅乃劳斯(约公元 1 世纪)工作的基础上,写成三角学的最早系统性论著《数学汇编》. 在该书中有著名的托勒密定理:在圆内接四边形中,两对角线之积等于两对对边乘积之和. 由这个定理得出 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 以及 $\sin2\alpha$、$\sin\frac{\alpha}{2}$ 的关系式. 据此,托勒密作出了从 $(\frac{1}{2})°$ 到

180°间隔为$(1/2)^{\circ}$的弦表.

除丢番图和托勒密外,取得重要成果的还有海伦、梅乃劳斯和帕普斯等.海伦最重要的著作是《测量学》,他的著作摆脱了古典数学的狭隘性,表现出直接与生产联系的强烈特色,其中有著名的三斜求积公式.梅乃劳斯的主要成就是球面三角的研究.帕普斯的工作主要是在几何方面.

总之,亚历山大时期大大开拓了希腊数学的领域,正是由于这个时期的成就,希腊数学才能作为一个比较完整的体系载入史册.在这一时期,定量研究有了很大进展,但并没有使偏重几何的方向发生逆转,算术和代数中,演绎式的逻辑结构始终没有建立起来,三角学的研究尚未摆脱天文学,这就决定了对于数的研究仍然是直观的、经验的,其发展是缓慢的,从而使几何的发展步履艰难.

整个希腊数学的消亡是由于罗马人的入侵所导致的.公元前146年,罗马人征服了希腊本土.公元前47年,凯撒纵火焚毁停泊在亚历山大港的埃及船队,大火延及该城,并无情地将图书馆两个半世纪以来收集的藏书毁于一炬.罗马统治者推崇的基督教的传播,迅速地以强烈的宗教狂热淹没了丰富的科学想象,使希腊数学蒙受了更大的灾难,查封学园、禁止学习研究数学,使欧洲数学进入了漫长的黑暗时期.

# 4 来自神秘国度的继承者与传播者

当希腊人在爱琴海岸创造的高度数学文明被来自异族的侵略者毁灭以后,延续了1000多年的古希腊文明虽在数学上留给后人无比丰富的遗产,但同时也留下了许多问题.首先,希腊数学的严格演绎推理的特点在发明创造时却是一个缺陷,因为许多发明创造都是以不甚严谨的猜想推测为出发点的,正是这一点为希腊数学所不齿,因此,希腊数学失去了许多发明创造的大好时机.如希腊人的穷竭法关于无限的讨论已相当深入,但是囿于严谨而终与发现微积分的一般方法失之交臂.再者,同样由于严谨性的考虑,代数学相对来说受到冷遇.由于古希腊数学的巨大影响力,这种情形一直持续了几百年.然而就是在古希腊数学文明衰微、欧洲处于长达1000年的中世纪黑暗时期,"西方不亮东方亮",在世界的东方,希腊残留的火花得到了保存与传播,这就是印度与阿拉伯的数学.

## 4.1 印度的数学

地处恒河流域的印度与古巴比伦、埃及和中国一样,也是人类文明的发祥地之一.大约在5000年前印度人就兴建起了具有相当规模的城市与宫殿,并且有了书写、计算和度量衡的体系.由于印度以农业为经济来源,很早就开始观察星象,编造历书,因而带动了数学研究.另外,印度是一个宗教盛行的国家,释迦牟尼创建的佛教曾流传到中国等地,这一教派的"绳法经"在科学文化方面有

较高的水平，也是在数学史上有意义的为数不多的宗教作品之一.印度远古时期的文字是书写在棕榈树叶和白桦树皮等天然材料上的，由于印度长期处于雨季，这些材料很快就腐烂了，故这个国家远古时期的文化没有能像古巴比伦、埃及和中国那样保存下来，这就使我们无从了解这支人类文化的源头那个时代在数学方面究竟做了些什么.

自公元前326年亚历山大大帝征服印度西北部以来，这个民族长期受到多次的外来侵略，多民族的文化在这里交融，这就孕育了印度数学的繁荣.

公元3世纪至12世纪是印度数学的繁荣时期，而其繁荣的标志表现为出现了一些著名的天文学家兼数学家.他们主要是：阿耶波多(Aryabhata)、婆罗门笈多(Brahmagupta)、摩诃毗罗(Mahavira)和婆什迦罗(Bhaskara).

阿耶波多(476～550)，又译圣使，出生于华氏城(今称巴特那)，我国古代高僧法显、玄奘分别于4世纪和7世纪访印时都曾到过那里.阿耶波多写了一部关于天文学的著作《阿耶波多文集》，其中有一章专讲数学，介绍了比例、开方、二次方程、一次不定方程、算术级数等问题，他得出了圆周率为3.1416的较好的近似值.

婆罗门笈多(598～660)，又译梵藏，出生于乌贾因，那里当时称为乌苌国，是古代印度的天文学研究中心，法显、玄奘等中国古代高僧也曾先后到过这里.婆罗门笈多30岁时写成一部重要著作《婆罗门修正体系》，包括"算术讲义"、"不定方程讲义"等章，其中有算术、勾股定理、面积、体积等内容，并讨论了二次方程，线性方程组及一次和二次不定方程的解法.他还利用内插公式造了一张正弦表，其著作曾译成阿拉伯文，对伊斯兰教国家的数学和天文学都产生过重大影响.

摩诃毗罗(850年左右)著有《数学九章》一书，其内容主要是算术运算、开平方和开立方、二次方程及组合问题，也讲到解二次

不定方程等.

婆什伽罗(1114～1185)对天文学和数学都有研究，是古代印度最杰出的数学家.他的名著有《丽罗娃提》和《算法本原》，这两部著作除了整理前人的成果之外还论述了有理数的四则运算、线性方程组和不定方程.他指出二次方程有两个根，并对形如 $Cx^2+1=y^2$ 的二次不定方程提出解法，他的著作还被译成波斯文，对海外影响很大.

12 世纪以后，印度数学的发展日趋滞缓，直到 19 世纪才有新的起色.

下面从算术、代数、几何和三角几个方面介绍印度数学.

### 4.1.1 印度的算术

在印度数学中最值得称道的是印度数码和 10 进位值制记数法.印度数码的完善是经历了漫长的发展过程的，例如“1、2、3”在公元 3 世纪时还是“一，二，三”，直到 4 世纪在巴克沙里手稿中才比较接近于现在的形式.在各类记数制中，零的记号是该进位制是否先进的一个重要标志.在印度数码中，人们用“•”表示零，关于与零有关的运算，摩诃毗罗说：“一个数乘零得零，加零、减零或除以零这个数都不变.”直到婆什伽罗才弄清楚零作除数产生什么结果.他的《根的计算》一书中指出：“被除数为 3、除数为 0 时，得商 3/0，这个分母为 0 的分数称为无限大量.”

印度人也很早就引进了负数.婆罗门笈多在 628 年左右系统地给出了负数四则运算的正确法则.婆什伽罗在《根的计算》中又进一步讨论了负数，他把负数叫做“负债”或“损失”，并用在数码上加一点表示负数，在数码的右下方加一点表示减号，例如 $\dot{3}.2=\dot{5}$，即 $-3-2=-5$，$3.\dot{2}=5$，即 $3-(-2)=5$，不过，当一个问题得出正负二个解的时候，他会解释说：“负数解不合适，因为人们不赞成负数，故应舍弃.”

印度人分数的概念也是较早的，除了在天文学中的分数仍沿用巴比伦的60进制记号外，他们在其它场合都用整数之比表示分数. 他们会对分数进行四则运算，在分数相加减时取分母的乘积为公分母而不求它们的最小公倍数. 在著名的巴克沙里手稿中，印度人将分子记在分母之上，无分数线分隔. 在带分数的情形，则把整数部分写在分子之上. 例如：

$$\begin{matrix}1\\2\end{matrix}=\frac{1}{2},\quad \begin{matrix}2\\1\\2\end{matrix}=2\frac{1}{2}.$$

开平方和开立方的方法最早见于阿耶波多的著作. 当开方不尽时，他们用近似值表示，如巴克沙里手稿中取$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r^2}=a+\frac{r}{2a}$，他们还给出了

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{3\times4\times34}.$$

这就相当于$\sqrt{2}=1.414215685$，这在当时是非常精确的. 婆什伽罗"按照整数那样"对无理数进行运算，并给出具体的运算法则. 例如无理数相加，用现代记号表示即

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)^2\cdot b}.\quad（其中\ a>b>0）$$

在阿耶波多的著作中还给出了一些级数求和公式，例如

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(n+2).$$

遗憾的是，我们还不能搞清楚他们是如何得到这些计算公式的，可

能是通过具体计算归纳出来的,也可能是从希腊人那里学来的.

### 4.1.2 印度的代数

印度数学家使用缩写文字和记号来记述代数方程,有时也用于其它场合,他们使用符号的程度大体上要比丢番图的简写代数稍有进步,不过两者使用的符号是完全不同的.例如婆什伽罗使用"yavat - tavat"(那么多)的前两个字母"ya"表示未知数,在含有多个未知数的场合,再使用表示颜色的词,如用 calaca(黑),nilaca(蓝),pitaca(黄),lohitaca(红),haritaca(绿)等的前两个字母表示其它未知数.不过,不同数学家使用的符号也不尽相同.

印度数学家常用假设法作为解方程或方程组的工具.例如,婆什伽罗提供了这样一个例子:两数立方之和为一平方数,两数平方之和为一立方数,求这两个数.用现代记号即求解方程组

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = m^2, & (1) \\ x^2 + y^2 = n^3. & (2) \end{cases} \quad (x, y, m, n \text{ 为自然数})$$

婆什伽罗先假设 $x = 1, y = 2$,满足(1)但不满足(2),为此必须在 $1^2 + 2^2 = 5$ 的两端乘上 5 的乘幂,使右端变成立方数同时满足方程(1)和(2),他用试验法,在(2)的两边同乘以 $5^8$ 获得成功,结果得 $x = 625$, $y = 1250$.

二次方程是印度数学家最感兴趣的课题之一,他们允许方程的某些系数是负数,从而可以把二次方程归结为标准类型

$$ax^2 + bx = c,$$

婆罗门笈多求得这个方程的一个根为

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a},$$

这与现代的求根公式完全相同.他所采用的方法可能是配方法.在摩诃毗罗与婆什伽罗的著作中也有类似的结论,他们甚至还讨论了双二次方程和一些特殊的三次方程.

不定方程的研究可能是印度数学家最值得自豪的，他们的成就超过了丢蕃图，因为他们不像丢蕃图那样只满足于求出一个有理数解，而是要求出所有的正整数解.阿耶波多在他的文集中最先提出方程 $ax \pm by = c$（$a,b,c$ 是正整数，$a,b$ 互素）的正整数解的求法.不过他的解法是一首短短的四句押韵诗，很难理解，经他的学生及历代数学家的注释，才逐渐清楚，其要点是对 $a,b$ 两数用辗转相除法互除，求得最大公约数以后再向上递推，后又经过摩诃毗罗和婆什伽罗的修改，其解法程序大致和现在初等数论中所讲述的方法相同.他们也研究过一次同余式组的问题，此外婆罗门笈多和婆什伽罗还研究过二次不定方程，特别是后者研究了这样一个问题，其可归结为 $x^2 = 1 + 61y^2$，所得的解为 $x = 1776319049$ 和 $y = 22615390$，得出这么大的解是很不容易的.

此外，印度数学家在公元11世纪给出了所谓金字塔图（见图4—1）.

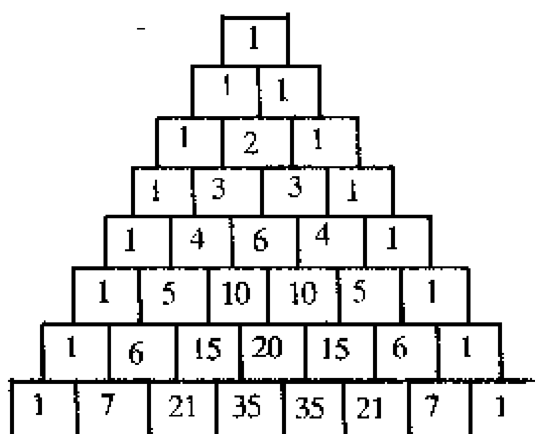


图 4—1

这就是由二项式展开式系数所构成的三角形，从中他们发现组合数公式

$$C_{n+1}^{r} = C_{n}^{r} + C_{n}^{r-1}.$$

### 4.1.3 印度的几何与三角

在印度数学中，几何相对于代数来说，显得有些平淡无奇，主

要是一些常见的几何体的体积公式,远远不如希腊人所达到的水平,不过他们的三角学研究却继承并发展了希腊人的工作.他们虽然沿用托勒密的方法,把圆分成 360 度或 21600 分,但不像托勒密那样把直径分为 120 等分,而是把半径分为 120 等分.他们计算的是半弦的长而不是全弦,这样,他们的"正弦"就相当于现在的正弦线,与今天的正弦仅相差 $r$($r$ 为半径)倍.此外,婆罗门笈多还首次利用内插法编制了一张正弦表,所用的内插公式在计算效能上与牛顿-斯特林公式是等价的.

尽管印度的数学在历史上曾有过辉煌的一页,他们的成就是举世公认的,但也有其局限的一面,主要表现在数学未能脱离天文学和宗教而独立存在,因此也就不可能形成完整的理论体系.其数学著作中的语言较为含糊而神秘,缺乏清楚的概念和严格的证明,他们把杰出成果与平庸之作混在一起,正如 11 世纪的波斯历史学家阿尔贝鲁尼所说的那样:"我们只能把他们的数学和天文学著作……比作宝贝和烂枣或珍珠与粪土或宝石和卵石的混合物."语言未免苛刻,但也不无道理.

## 4.2 阿拉伯人的数学

公元 7 世纪前期,在穆罕默德的领导下,阿拉伯半岛上分散的部落在强烈的伊斯兰宗教热情的感召下统一起来,并迅速崛起.在强悍的武力扩张下,他们建立了一个东起印度西部,西至西班牙,北抵中亚,南达北非的庞大帝国.8 世纪中期,这个帝国一分为三,成为三个都讲阿拉伯语的伊斯兰国家.

阿拉伯人对数学的研究始于 8 世纪中叶或 9 世纪初.开始时,他们以翻译和学习印度、希腊的数学经典为主.随后在消化、吸收这些著作的基础上进行独立的数学研究.今天我们所说的"阿拉伯数学",主要是指那些用阿拉伯文写成的数学,而事实上,这个时期

在这里从事数学研究的学者还有波斯人、希腊人、摩尔人、塔什干人、犹太人和欧洲的基督教徒们，当然这主要还应归功于阿拉伯人的宽大胸怀，他们在征服了这些民族以后，并没有排斥这些民族的文化，在推行伊斯兰教的同时，容许异教徒自由活动.他们关心并倡导科学和艺术，邀请印度和希腊的科学家到巴格达从事译述和研究，使巴格达成为一个文化中心，促进了阿拉伯世界科学文化的繁荣，这种繁荣时期经历了600年，直到1258年，巴格达被蒙古军队攻陷才开始走向衰落.

### 4.2.1 阿拉伯数学的分期与杰出的数学家

(1) 早期:8世纪中叶～9世纪

这一时期最重要的数学家是阿尔·花拉子米(Al－Khowarizmi,约780～850)，他出生于花拉子米城，并以此得名，曾担任过阿拔斯王朝第五代哈里发的司书官，以博古通今著称.他仔细研究过印度天文学，并根据印度天文表中的资料，编辑了阿拉伯最古老的天文表.他写过很多书，内容涉及天文、历法、算术、代数等多个领域，其中最著名的是《代数学》，这部著作曾被译成拉丁文，在欧洲被用作代数学标准教科书达几世纪之久.另一本著作《算术》介绍印度数码的计算方法，后由英国人译成拉丁文，通过这本书，欧洲人才了解到印度的数码和记数系统，由于花拉子米的著作在中世纪流传极广，拉丁语系里的"算法"(Algorithm)一词就是由他的名字的拉丁译音衍生出来的.除了花拉子米外，这时期还有不少数学家从事译述，特别是塔比 . 库拉(Thabitibn Qurra,826～901)，他是一位知识渊博的数学家和天文学家，曾创办了一所翻译学校，有力地推进了希腊著作的翻译.在9世纪下半叶，欧几里得、阿基米德、阿波罗尼斯和托勒密等人的著作被译成阿拉伯文.

(2)中期:10世纪～12世纪

这时期是阿拉伯数学发展的高峰期，出现的著名数学家有巴塔尼、阿布·瓦法和奥马·海雅姆.

巴塔尼(al－Battani,约858～929)是两河流域巴坦地方的人.他主要研究天文学,积40年的实测经验,写成《星的科学》这部很有价值的著作,后来哥白尼在巨著《天体运行论》中多次引用巴塔尼的实测数据就说明了这一点,由于天文学研究的需要,巴塔尼致力于三角学的研究,并取得重要的成果.

阿布·瓦法(Abu al－Wafa,940～998)出生于霍拉桑,曾翻译过丢番图的著作,本人对三角学和算术都有重要贡献.

奥马·海雅姆(Omar Khayyami,1044～1223)也是霍拉桑地方的人,既是一位有名的数学家和天文学家,也是一位著名的诗人和思想家,他与别人合作编写的中世纪最精密的哲拉里历,每隔5000年才相差一天,其精密程度由此可见一斑.他的《代数学》比花拉子米的《代数学》也有明显的进步,在这部著作中,他详尽地研究了三次方程的根的几何作图法,提出了用圆锥曲线图解求根的理论,这是阿拉伯数学最重大的成就之一.

3)后期:13世纪～15世纪上半叶

这一时期阿拉伯帝国走向崩溃.在1258年哈里发王朝覆灭后,阿拉伯语言在很长一段时间内仍然是这一地区的科学用语,故直到15世纪,这一地区的学者的著作仍被归入阿拉伯科学.这一时期的重要数学家有纳西尔丁·图西和卡西.

纳西尔丁·图西(Nasir al－Diu al－Tusi,1201～1274)生于13世纪最大的文化中心霍拉桑,是一位学识渊博的学者,其著作涉及天文、三角、几何、星盘等多个方面.1259年,他在罗腊格建造了一所大天文台,领导一批有才华的科学家,汇集来自不同地区的珍贵科学手稿,并根据在天文台积累的大量观测资料,编制《伊尔汉历》,对科学发展有很大的影响.他对三角学的重要贡献是编写了一本脱离天文学的著作《论四边形》.

卡西(al－Kashi,？～1429)是乌兹别克人,著名的天文学家和数学家,著有《算术之钥》.此书内容广泛,特别在二项式展开、高次

方程的数值解法等方面都有引人注目的贡献. 有人认为,他的高次方程的解法可能是从中国传入的. 他精于计算,算得的 $\pi$ 值精确到小数点后 16 位.

### 4.2.2 阿拉伯的算术与代数

阿拉伯的算术成就最杰出者首推花拉子米,但他的原著已经失传,今天看到的是 14 世纪中叶的拉丁文译本,此书是用阿拉伯文介绍印度数码、十进位值数制和计算方法的最早的著作. 花拉子米在书中给出了符号"0",以及 0 在十进位值数制中的作用及其运算规则,书中除整数运算外,还包括分数及其运算. 在叙述主要用于天文学的 60 进制分数运算法则的同时,也给出了普通分数的运算,不过他在通分时取分母的乘积为公分母,似乎也不会约分.

花拉子米的《代数学》,无论在内容,还是风格上都代表了一个新的起点. 该书首先把代数学作为一门有别于其他学科的、独立的数学分支来处理. 此书内容分三大部分:第一部分讲述现代意义下的初等代数;第二部分论及各种实用算术问题;第三部分列举了有关继承遗产的各种类型的问题. 其中第一部分是全书最有价值的部分,在这里花拉子米系统地讨论了 6 种类型的一次或二次方程的解法,并介绍了配平方法. 花拉子米的著作完全用文字叙述,下面用现代符号表示他的 6 种类型的方程:

| | |
|---|---|
| 平方等于根(根即未知数) | $ax^2 = bx$; |
| 平方等于数 | $ax^2 = c$; |
| 根等于数 | $ax = c$; |
| 平方加根等于数 | $ax^2 + bx = c$; |
| 平方加数等于根 | $ax^2 + c = bx$; |
| 根加数等于平方 | $bx + c = ax^2$. |

其中系数 $a, b, c$ 都是正数. 花拉子米知道二次方程有两个根,但是他只取正根,放弃负根和零根. 正因为系数和根都限取正数,所以无法将以上 6 种类型的方程统一起来. 但在花拉子米的著作中,

一个代数式中的项既可指数(包括无理数),也可指几何量,这正是优于希腊代数的地方.

更加重要的是,花拉子米采取演算与论证并举的方式来阐述解方程的过程.他对形如 $x^2+px=q$ 一类方程的解法,尤为令人注目,第一种证法是在边长为 $x$ 的正方形的四条边上向外作边长为 $x$ 和 $p/4$ 的矩形,再在这个图形的四角作边长为 $p/4$ 的四个小正方形,使全图成为边长为 $x+(p/2)$ 的大正方形(如图 4-2),由此推知

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+4\left(\frac{p}{4}\right)x+4\left(\frac{p}{4}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

由于 $x^2+px=q$,所以 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}$,则

$$x=\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2}.$$

第二种证法如图 4-3 所示,可得出

$$x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

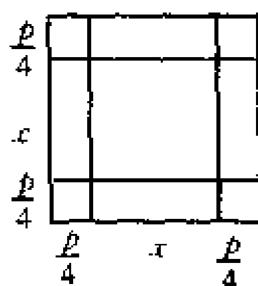


图 4—2

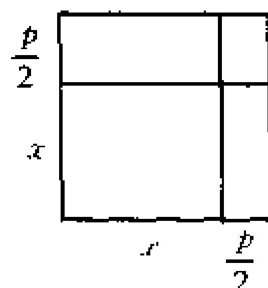


图 4—3

花拉子米在分别讨论了 6 种类型的方程之后指出:通过"复原"与"对消"两种变换,可将其他形式的一次、二次方程化成这 6 种标准方程,这里所谓的"复原"与"对消"相当于今天的移项和合并同类项,他将这两种变换看作是解方程的两种最基本的变换.事实上,他的《代数学》这本书的原名就是由复原(aljebr)和对消(muqabala)两词组合而成的,即 al-jebr W'al-muqabala,在传抄过

程中逐渐演化成今日的 algebra(代数),由此可见这本书在代数学发展史上的地位.

奥马·海雅姆在他的《代数学》中用圆锥曲线来解代数方程,是阿拉伯数学中最有创见的成就之一.例如,他用几何方法给出形如 $x^3+b^2x+a^3=cx^2$ 的三次方程的解,其中 $a,b,c,x$ 都被看做是线段的长度.他首先应用求第四比例项的基本作图法,由已知线段 $a,b,c$ 作出线段 $m=\frac{a^3}{b^2}$,这是古希腊数学家就会的.再如图 4－3,作 $AB=m$ 及 $BC=c$,以 $AC$ 为直径作一半圆,并过点 $B$ 作 $BD\perp AC$ 交半圆于 $D$.在 $BD$ 上截取 $BE=b$,过点 $E$ 作 $EF/\!/AC$,在 $BC$ 上作点 $G$,使 $AB:BG=ED:BE$,并作矩形 $DBGH$,过点 $H$ 作一条以 $EF$ 和 $ED$ 为渐近线的等轴双曲线.设该双曲线和半圆相交于 $J$,过 $J$ 作 $JL/\!/DB$,交 $AC$ 于 $L$,则 $BL$ 即为所给三次方程的一个根.

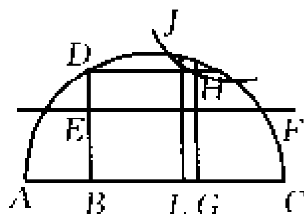


图 4—4

事实上,海雅姆对一元三次方程进行了系统的分类,并详尽地研究了每类方程的解法,虽然他给出的只是方程的正根,且最终还是通过度量所得到的精度不高的近似值,但这无疑是对古希腊圆锥曲线论的发展.阿布·瓦法也曾尝试过类似的方法,特别令我们感兴趣的是,在他的《算术的应用》一书中,解二次方程时应用了负数.

### 4.2.3　阿拉伯的几何与三角

阿拉伯数学家在翻译和注释《几何原本》等希腊著作的基础上,也展开了对几何的研究.值得注意的是,这一时期许多阿拉伯数学家都对平行公设问题作了探讨,得到了许多关于平行线的结论,并因此而成为探讨平行公设问题的先驱.

在阿拉伯几何中,最精彩的篇章是卡西关于圆周率 $\pi$ 的计

算.他在半径为 $r$ 的圆中定义弦的序列 $a_1,a_2,\cdots$ 的值,它们所对的弧依次是:$\alpha_1=30°,\alpha_2=15°,\alpha_3=7.5°,\cdots$,一般地 $\alpha_n=\frac{60°}{2^n}$.

如图 4－5,$AB$ 为直径,$D$ 是弧 $BC$ 的中点,

卡西在计算中引用了下面的公式

$$AD^2=\frac{AB}{2}(AB+AC).$$

设 $AD=b_n$,则此公式即

$$b_n=\sqrt{r(2r+b_{n-1})}.$$

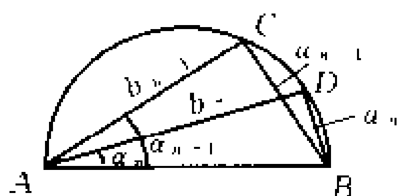



图 4—5

根据这一公式,卡西计算了一系列具有确定的 $n$ 值的圆内接正 $3\times2^n$ 边形的周长,其每一条边长 $a_n$ 可据勾股定理得 $a_n=\sqrt{(2r)^2-b_n^2}$,

取 $r=1$,卡西依次计算到当 $n=28$ 时,

$$a_{28}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}.$$

用同样的方法,卡西求出圆的外切正 $3\times2^n$ 边形的周长,然后取二者的算术平均数作为圆的近似周长.通过这样的计算程序,卡西最后求得圆周率 $\pi$ 的近似值为:

$$\pi\approx3.1415926535897932.$$

精确到小数点后 16 位,这也使卡西成为中国境外第一个应用十进小数的人.

阿拉伯人的三角融会了希腊和印度的长处,特别是他们像印度人一样,计算半弦之长而不是全弦之长.巴塔尼从三角线出发,用代数方法得到下列关系(用现代记号表示):

$$\frac{\text{ctg}\alpha}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \frac{\text{tg}\alpha}{r}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\frac{\sin\alpha}{r}=\frac{1}{\csc\alpha},\quad \frac{\cos\alpha}{r}=\frac{1}{\sec\alpha},$$

等等.由此可见,巴塔尼掌握了 6 种三角线的概念和相互关系,他

还研究了三角形的解法，其基本方法是作出某一条边上的高，把问题转化为直角三角形来解.

阿布·瓦法对三角学的贡献在于把所有三角线都定在同一个圆中，而三角学的系统化则应归功于纳西尔丁·图西，他在《论四边形》中指出，由球面三角形的三个角可以求出三条边，反之由三条边可求出三个角，并且从基本概念和比例开始，直到给出各种类型问题的解法，较完整地建立起三角学的系统. 这部著作从 15 世纪起传入欧洲，对欧洲三角学的发展产生了重要的影响.

由上述可知，从 8 世纪到 14 世纪期间，欧洲数学还处于低潮，阿拉伯人却在数学方面取得显著成绩，虽然其创造性和深刻性比不上希腊数学，但是相对于当时的欧洲和地中海地域来说，他们算得上是最有学问的人了，更重要的是他们担负起精神财富的保存者和传输者的使命，对世界数学的发展作出了巨大的贡献.

# 5　源远流长的中国古代的数学研究

中国是一个有着悠久历史和灿烂文化的文明古国．中国古代的四大发明曾经极大地推动了世界文明的进步．同样，作为中国文化的一个重要组成部分，中国古代数学，由于其自身的历史渊源和独特的发展过程，形成了与西方迥然不同的风格，成为世界数学发展的历史长河中的一支不容忽视的源头．

数学是中国古代最为发达的学科之一，通常称为“算术”即“算数之术”．就是说，古代中国的术语“算术”相当于英文中的 mathematics，而不是 arithmitic．所研究的内容大体上是今天数学教科书中的算术、代数、几何、三角等方面的内容．后来，算术又称为算学、算法．宋元时期开始使用“数学”一词，此后算学、数学两词并用．1939 年 6 月，经中国数学名词审查委员会确定用“数学”而不再用“算学”．

与世界上其他民族的数学相比，中国数学渊源深远流长，成就卓著．本章按照年代的顺序，巡视一下中国古代数学发展的状况．

## 5.1　先秦时期——中华土地上数学的萌芽

中国是世界著名的文明古国，和古巴比伦、埃及和印度一样，她也是人类文化的发源地之一．数学作为中国文化的重要组成部分，它的起源可以追溯到遥远的古代．根据古籍记载、考古发现以及其他文字资料佐证，至少在公元前 2000 年左右，在中华大地的土地上就有了数学的萌芽．一般认为，这一时期的数学成就主要有

以下几点：

### 5.1.1 结绳记事

据《易·系辞传》称："上古结绳而治."《易·九家义》明确地解释了这种方法："事大，大结其绳；事小，小结其绳. 结之多少，随物众寡."这种结绳记事的方法是很古老的. 据《史记》记载："伏羲始画八卦，造书契，以代结绳之治."这表明，在伏羲这一位中国神话中人类的始祖之前，结绳记事这种方法就已十分流行，并且在他的时代已开始用"八卦"和"书契"来代替"结绳记事"了.

### 5.1.2 规矩的使用

规矩是中国传统的几何工具. 至于它们的用途，《周礼》、《荀子》、《淮南子》、《庄子》等古籍都有明确的记载："圆者中规，方者中矩."说明它们分别用于圆与方的问题. 它们的起源也是很早的，据《史记》记载，夏禹在治水时就"左准绳，右规矩，载四时，以开九州，通九道". 甚至在汉武梁祠中还有"伏羲手执矩，女娲手执规"的浮雕像，将这两种工具的最早使用归功于传说中的伏羲与女娲. 规与矩的使用，对于后来几何学的产生和发展有着重要的意义，中国传统几何学大部分内容都是围绕圆与勾股形展开的. 这与古代中国人擅长使用规与矩的关系是十分密切的.

### 5.1.3 十进位制记数法、分数的应用及筹算

在中国第二个奴隶制王朝商代（公元前 16 世纪到公元前 12 世纪），甲骨文已发展成熟. 据对河南安阳发掘的殷墟甲骨文及周代金文的考古证明，中国当时已采用了"十进位值制记数法"，并有十、百、千、万等专用的大数名称，这是对世界数学最伟大的贡献，正如李约瑟博士所指出的那样："如果没有这种十进位制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了."而这一点又正是同时代的古埃及和古巴比伦数学所不及的. 除了整数以外，中国古代对分数概念的认识也比较早，分数的概念及其应用，在《管子》、《墨子》、《商君书》、《考工记》等春秋战国时代的书籍中都有明确的记

载.到春秋战国时代,算术四则运算已经成熟.据汉时燕人韩婴所撰的《韩诗外传》介绍,标志着乘除法运算法则成熟的“九九歌”在春秋时代已相当普及.《吕氏春秋》还载有这样一个有趣的故事:在春秋时代的齐国,齐桓公执政的时候,有一个人熟背“九九歌”,便向齐桓公毛遂自荐,齐桓公问他:“难道仅仅因为你精通九九之术,我便要重用你吗?”这个人答道:“如果君主对我这样一个仅会九九歌的人都能礼遇重用,还怕真正有才能的人不来为君主效力吗?”齐桓公是否厚待此人不得而知,但这从一个侧面说明了在当时九九歌已被人们广泛地应用了.

算筹是中国古代的计算工具.筹即小竹棍或小木棍(也有用骨或金属材料制成的).从出土的汉代算筹可以知道,这种算筹比我们日常使用的筷子稍短稍细一点,古人就用它来进行计算,相应的一套算法也就称为筹算.从春秋战国时期一直到元代末年,算筹在我国沿用了两千多年.用算筹表示数有纵横两种摆法:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 纵式 | 𝍠 | 𝍡 | 𝍢 | 𝍣 | 𝍤 | 𝍥 | 𝍦 | 𝍧 | 𝍨 |
| 横式 | 𝍩 | 𝍪 | 𝍫 | 𝍬 | 𝍭 | 𝍮 | 𝍯 | 𝍰 | 𝍱 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

记数时与十进位值制相配合,采用从左到右(或从上到下)纵横相间的摆法.如6728表示为𝍮𝍦𝍪𝍧;如遇零时则空一格,如6708,表示为𝍮𝍦 𝍧,即使这种空位很小,也会由纵横相间的法则看出.与巴比伦相比,他们虽然也早有位值制的思想,但由于没有零的记号,辨别一个具体的数时,往往令人难以琢磨.

### 5.1.4 精湛的几何思想

除了出土的陶器等给我们展示了那个时代各种精美的几何图形外,更令我们感兴趣的是《墨经》所记载的那些几何概念,如“平,同高也”(两条直线或两个平面间的距离处处相等称为平行);“中,同长也”(直线段的中点至两端点的距离相等,或圆的圆心(球的球

心)到圆周(球表面)的距离相等);"圜,一中同长也"(圆或球,皆有一个中心,即圆心或球心,圆周或球表上任一点到中心的距离相等).这些都是春秋时期墨家学派试图用形式逻辑的方法定义几何概念的明证.另外,庄子关于极限的论述"一尺之棰,日取其半,万世不竭"(一尺长的木棒,第一日截去一半,第二日截去剩下的一半的一半,如此下去,永远不会截取完的),也是世界数学史早期最光辉的数学思想之一.

### 5.1.5 数学教育的开始

据记载着周代教育制度的古老典籍《周礼·保氏》称:"教国子以六艺:一曰礼,二曰乐,三曰射,四曰御,五曰书,六曰数."并还称:"六年教之数(shǔ),十年学书计."可见,早在周代,国家就已把数学列为贵族子弟的必修课艺之一,从六岁或十岁就教数(shǔ)数(shù)及计算了.对数学教学如此重视,且以典制的形式规定下来,这在世界历史上是罕见的.

上面谈的是先秦时期的数学,这一时期一直持续到汉初.

## 5.2 汉唐时期——传统数学体系的形成

从汉代开始,中国的经济文化有了进一步的发展,经济的繁荣给科学的进步提供了物质基础,特别是文字与度量衡的统一、铁器的使用以及大量兴修水利工程和水陆交通的工程,为人们探索大自然的奥秘增强了动力,使数学也有了长足的发展,其主要标志是以《九章算术》为代表的中国传统数学体系的形成.

《汉书·艺文志》所记载的《杜忠算术》与《许商算术》大概是中国有记载可考的最早的数学著作,可惜均已失传.1984年,湖北江陵张家山出土了一部汉简《算数书》,据考证,此书是汉高祖(公元前206年?)到汉文帝(公元前179年)时代的一部数学著作,它也是中国目前所能见到的最早的数学专著.该书以问题集的体例编纂,全书共90题,包括整数、分数的四则运算,比例问题,面积与体

积等，大部分内容与《九章算术》相似.

比《九章算术》稍早且流传下来的一部重要的著作是《周髀算经》.严格地讲，它并不是一本数学专著，而是一部介绍"盖天说"的天文学著作，但它包含了相当深刻的数学内容，其主要成就有勾股定理及其应用.该书记载了许多人的对话，其中在陈子与荣方的师生对话中借陈子之口给出了一般的勾股定理："求邪至日者，以日下为勾，日高为股.勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日."(如图5－1)，即给出公式

$$邪至日(弦)=\sqrt{勾^2+股^2}.$$

此外，该书还介绍了许多种利用勾股定理进行测量的方法，如测量太阳的直径、太阳的高等.同时，在勾股测量与计算中，还涉及十分复杂的分数计算，这在以前的著作中是没有的.

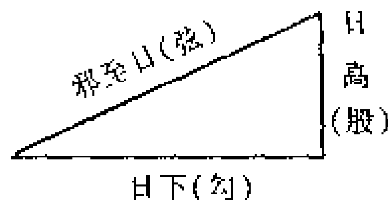


图5－1

标志着中国传统数学理论体系形成的是《九章算术》的成书.该书的作者和成书年代难以确切地考证，多数学者认为，它成书于西汉末东汉初，即公元一世纪初.中国的数学，经过长期的积累，到西汉时已有很丰富的内容，但这些内容之间缺乏内在的联系，以前人们曾寻求以确定的方式建立某种联系，例如墨家学派曾尝试过用逻辑方法研究数学概念，但没有成功.也许正是这种原因，决定了《九章算术》所特有的处理方式，并形成了中国传统的数学体系.

《九章算术》内容丰富，且密切联系实际，全书共有246个应用题，按照数学性质分为九类，组成九章.对于每类问题，《九章算术》中都给出了统一的解法，它们相当于一些初等数学定理和公式，但没有证明.解法大多数是正确的，有些是近似的，极少数有错误.关于《九章算术》的内容与成就，我们将在下章详细介绍.

《九章算术》注重实际问题的解决与长于计算的风范，对中国传统数学的发展有着极其深刻的影响，可以说，与西方数学的演绎

倾向相映生辉的中国传统数学的算法倾向就起始于《九章算术》.《九章算术》成书以后,便成为中国传统数学的经典,成为后来数学家们学习、研究和著述的依据.

刘徽是《九章算术》的注释者中成就最杰出的一个.刘徽,三国时魏人,可能是布衣出身.他走上数学研究的道路完全是受《九章算术》的影响.据称,他早年就曾系统地学习过这部著作,并逐渐对数学有所心得,因此,他以"注"的形式将其研究成果记载下来,完成了著名的《九章算术注》.在他的"注"中,用语言来讲清道理,用图形来解释问题,开始了其独特的推理论证的尝试,这对理解《九章算术》帮助极大,同时,也丰富了《九章算术》的内容,完善了《九章算术》的体系.他为了阐述几何命题,证明几何定理,创立了"以盈补虚"的方法,具有很大的实用价值;他为计算圆周率提出的"割圆术",在中国数学史上,首次将极限概念用于近似计算;他的十进小数的记法和对正负数概念的认识,把人类对这两个问题研究的历史提前了好几百年;他提出的"齐同术"、"方程新术"等都是对《九章算术》方法的进一步阐发与补充;特别是他对勾股测量问题的深刻研究,使得他感到以往的形式已不能满足要求,故不得不重立新说,写成了名著《海岛算经》,对此,将在下章详细介绍.因此,刘徽是中国早期对数学理论进行了深入研究的最杰出的数学家之一.

与刘徽几乎是同一时代的三国吴人赵君卿(赵爽),也是一位杰出的数学家.他深入研究了《周髀算经》,也为之作了"注",其中极有价值的是所谓"勾股圆方图注",全文虽仅530余字,但它给出勾股定理的证明,这在中国历史上是第一次,其基本思想是将图形"移补凑合"而保持面积不变.在《周髀算经注》中,赵爽补作了一张弦图(如图5－2),大方的每边为勾股和,中方的每边为弦,小方的每边为勾股差.中方中的每个直角三角形(勾股形)称为一个"朱实",共有四个,加上一个"中黄实",它们的面积相加恰好为一个中

方(称为“弦实”),用数学表达式给出就是

$$4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2.$$

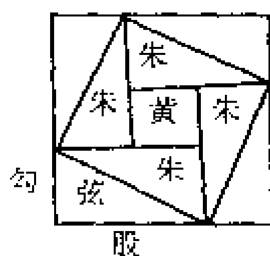


图 5—2

而等式的左边 $=a^2+b^2$,这样就证明了勾股定理 $a^2+b^2=c^2$.这一方法现已被写入了中学数学教材.这种证明的思想方法后来发展为“演段术”,成为中国宋元时期重要的数学方法.此外,在赵爽的这篇短短的“注”中,还包含了二十几个与勾股定理有关的命题的解法与证明.

三国以后直到南北朝的300多年间,虽然战争连年不断,国家处于分裂状态,但中国的数学仍在发展.一方面,数学在天文历法、度量衡的研究等方面得到广泛的应用,另一方面在理论上也继续沿着刘徽所开辟的道路前进,出现了像祖冲之、祖暅父子这样一批杰出的数学家.

祖冲之(429～500)是南北朝人,长期在刘宋政府担任各种职务,虽然行政事务繁忙,但他仍利用一切空暇时间从事天文历法和数学的研究.他工作踏实认真,例如,他对前人的历法进行了充分的分析比较,并坚持长达十年之久的实测,最后完成了《大明历》(463年),这是一个具有很高实用价值的历法.祖冲之最大的成就是在数学方面.他研究过《九章算术》及刘徽注,并为这两种文献作注,他还自著了《缀术》一书,可惜这些重要文献都已失传,现在只能从其他的文献中找到一些关于祖冲之数学成就的记载,其中最杰出的是关于圆周率的计算,祖冲之把这一重要的数值精确到小数点后面第六位,这一关于 $\pi$ 的近似值的世界纪录被祖冲之保持了近一千年.他和他的儿子祖暅在刘徽注的基础上进一步深入研究了《九章算术》中的“开立圆术”,并最终巧妙地求出了球体积计算公式

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3. \quad (r\text{ 为球半径})$$

在解决这一问题的过程中提出了下述原理:"缘幂势既同,则积不容异",即夹在两个平行平面间的两个几何体,被平行于这两个平面的任意平面所截,若所得截面总相等,则此二几何体体积相等.它被称为"祖暅原理",这一原理在西方直到17世纪才由意大利数学家卡瓦列里发现,比祖暅晚了1100多年.

这一时期的数学著作较多,流传至今的就有《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《数术记遗》和《夏侯阳算经》等,这些著作大都反映了当时社会各方面的需要,在内容上基本是《九章算术》的沿袭与补充,在编写风格上也大多模仿《九章算术》.特别需要指出的是《孙子算经》中的"物不知数"问题,在世界数学史上有重要的地位,外国称其解法为"中国剩余定理"或"孙子定理",它与《张邱建算经》中著名的"百鸡问题"一起被认为是我国不定分析研究的起源.这些方面的内容我们还将在另外的章节中讲述.

隋唐时期是中国封建社会发展的鼎盛阶段,社会稳定,农业生产发展迅速,使得与生产密切相关的历法、数学又有了长足的进步.出身于闾阎的数学家王孝通(公元7世纪)通过对当时的土木工程中出现的数学问题的研究和总结,写成《缉古算经》,全书共20题,最重要的有堤积计算公式和对高次方程的研究,弥补了《九章算术》与《缀术》等书的不足.在天文历法的研究中,隋代卓越的天文学家刘焯(544~610)在《周髀算经》中一次内插法的启发下,首先在天文历法研究中应用了等间距二次内插法公式.接着,唐代的僧一行(俗名张遂,687~727)推广建立了不等间距的二次内插法公式,即数学史上有名的"张遂内插法公式",同时,僧一行还组织了世界上第一次对地球子午线的实际测量.

值得指出的是,从隋代开始,中国有了专门的数学教育机构.

在隋朝的最高学府——国子监中,设有算学博士与算学助教各二人,专门从事数学教学,有算学生 80 人.唐朝建立以后,在隋的基础上,继续在国子监中设立数学教育机构,他们把数学教育与明经、明法、明书等并列为六科,称作明算科.为了教学的需要,由数学家李淳风等人共同审定并注释了十部算经作为数学教材,这十部著作是《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》、《缀术》和《缉古算经》,这就是历史上著名的"算经十书",其中记载了汉唐的数学成就,并成为后人数学教学与研究的重要源泉.

## 5.3 宋元时期——传统数学的兴盛

这一时期包括宋元两代,即 900 年至 1368 年.

众所周知,宋代结束了五代十国的封建割据的局面以后,出现了社会稳定、生产发展、经济繁荣的景象,特别是统治者鼓励发展科学技术,同时改革旧的科举制度,极大地推动了科学文化技术的发展.到了元代,蒙古骑兵占领了欧亚广大地区,促进了中外交流,印刷术的发展也推动了数学教育与研究,再加上前一时期数学知识的大量积累,诸多因素的汇集,促使中国以算筹为主要工具的传统数学出现了极其辉煌的成就,到达了兴盛时期.

这一时期的一个显著的标志是数学家及其数学著作的大批出现.据不完全统计,著名的数学家数十人,有记载的数学专著百余种,远远超出了前面的各个时期.数学研究的内容也有了显著的变化,如果说由赵君卿、刘徽至王孝通的这一时期,几何学得到了高度发展,那么宋元高峰时期基本上是以代数为中心的时期.在这个时期,关于高次方程的数值解法、线性方程组的解法、高阶等差数列、组合数学、半符号代数以及属于数论范畴的同余式组的解法等,都达到了当时世界的最高水平.下面介绍几位具有代表性的数学家.

这个时期首先登场的是博学多才的沈括(1030～1094). 沈括虽出身于名门望族,本人又在北宋朝廷中做过官,但他比较接近下层,注重实际,掌握了大量的第一手科技资料,晚年写成的名著《梦溪笔谈》,被李约瑟誉为"中国科学史的里程碑". 该书提出的高阶等差数列求和的"隙积术",由圆的直径和高计算弓形弧长的"会圆术",以及计算棋局总数的"棋局都数"等课题都具有很高的学术价值.

秦九韶的《数书九章》在中国数学史中与《九章算术》有着相当的知名度. 秦九韶,字道古,1202 年生于四川,其父曾任南宋四川巴州守,优越的家庭环境使得秦九韶能有机会去向掌管历法的太史局官员求教天文历法,在数学上又得到过"隐君子"的指点教诲,他本人也历任多处地方官,但任期都不太长,后因参与派系斗争失败,被贬谪到梅州(今广东梅县)任职,1261 年死于任所.

《数书九章》这部传世名著是他 1244～1247 年在家守母孝期间撰写的,其主要内容是他此前十数年间埋头钻研数学的结果. 这部著作继承了中国古代传统数学的特色,特别是受《九章算术》的影响,采用了问题集的形式. 全书搜集了与当时社会生活密切相关的 81 个数学实际应用问题,按性质分为九类,每类九题,共 18 卷. 其中"大衍类"推广了《孙子算经》的"物不知数"问题,我们将在"中国剩余定理"一章中详细介绍. 此外,他推广传统的"开方法",创立了"正负开方术",给出了任意高次方程的数值解法,其演算步骤与英国数学家霍纳于 1819 年提出的"霍纳法"相类似,但早 600 年之久,另外他对线性方程组解法的研究和提出的"三斜求积公式"都具有世界意义.

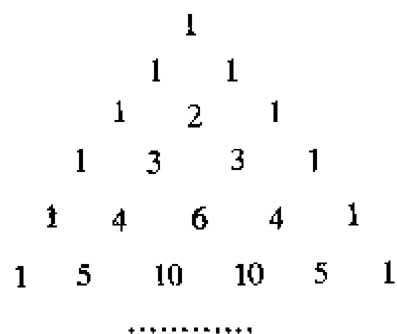



图 5—3

与沈括、秦九韶等人相比,南宋末年的杨辉非常重视数学教育,

从他留下的数学著作就可以看出这一点．他的著作非常丰富，计有5种21卷，书中将各类实际问题，分门别类，由浅入深安排，便于学生学习．其《详解九章算法》所载“开方作法本源”图，不仅给出了二项式展开式中的各项系数，并指出了这些系数的求法，这就是通常人们所谓的“杨辉三角形”（图5—3）．据杨辉称，他的这张图最早见于北宋贾宪的《黄帝九章算法细草》，遗憾的是这本书我们已经看不到了．西方称之为“帕斯卡三角”，但就发明时间而言，中国至少要比帕斯卡早半个世纪．另外，杨辉在《详解九章算法》中对于各类级数求和问题的研究和《续古摘奇算法》中对纵横图的研究都是非常重要的，特别是后者，与早期的组合数学密切相关．

“天元术”的产生标志着中国传统数学发展到一个新的高度，这就是半符号代数的产生．据研究，这一先进的数学方法产生于12世纪，然而李冶的《测圆海镜》是现存的第一部系统介绍和研究“天元术”的著作．李冶（1192～1279）曾中过金朝进士，并担任过地方官．金朝灭亡后，他隐居于今山西、河北一带，一面进行数学研究，一面收徒讲学．在这期间，他完成了《测圆海镜》十二卷（1248年）和《益古演段》三卷（1259年）．在这两部著作中，他对已有的“天元术”进行了改进与简化，其方法是根据算式的次序，用一个“天”字表示未知数，如图5—4所示就相当于方程



图5—4

$$x^3+336x^2+4184x+2488320=0.$$

抛弃了那种每一项都要用一个文字来表示的繁琐的方法，形成了一种简捷的固定形式，即“天”表示未知数的一次项，向上依次各项分别是二次项、三次项、四次项，……，下面是常数项．作为应用，他

关系.

元代数学家朱世杰推广了"天元术",提出用"四元术"来解四元方程,可以说这是中国筹算代数学的顶峰.朱世杰,字汉卿,寓居

[illegible]

通诸术"、"以数学名家周游湖海十余年,四方之来学者日众",他曾数次到江苏扬州一带传授数学,深受当地学者的欢迎.他集宋、金、元数学之大成,先后写成《算学启蒙》三卷(1299 年)与《四元玉鉴》三卷(1303 年),前者浅显,后者深奥,二书互为表里,相互补充,都是中国古代数学的重要著作.《四元玉鉴》的主要内容之一就是对多元方程的研究.他推广"天元术"和"正负开方术"而给出的"四元术",实际是一种四元高次方程组的布列与求解方法.在《四元玉鉴》中,朱世杰给出了四元

## 5.4 明清时期——衰落与复苏

从明代起,中国封建社会开始衰落,资本主义因素开始慢慢地地萌发了,但由于根深蒂固的封建帝王统治的抑制,使资本主义的幼芽未能顺利得以发展.统治阶级为了维护其统治地位,规定科举制必须采用"八股"文体,使得大批的知识分子"皓首穷经",而鄙夷天文、数学等专门学问为"奇技淫巧",加上生产水平低下与数学理论高度发展相脱节的实际状况,致使中国数学由宋元时期的蓬勃发展而突然走向衰落.

一个典型的例子是,明代有两个很有影响的数学家唐顺之和顾应祥,他们在读李冶的《测圆海镜》时,竟然不能理解"天元术"的意义,然而,他们还自作聪明,认为原著中的细草是多此一举,故把它们全部删去,使得后世人们很难理解李冶的原意了.

当然,尽管这一时期数学的许多分支停滞不前了,但也并非整个数学学科就没有发展.随着明代手工业经济及航海贸易的发展,商业数学倒是异军突起,有了长足的进步.特别是珠算,自宋代提出了改革筹算,到元明之际,珠算盘作为数学计算工具,其应用日益广泛.到了明代中叶,珠算已在全国普及,彻底完成了筹算向珠算的转变.杭州数学家吴敬积20年之功完成了《九章算法比类大全》,该书收集了大量与商业活动有关的计算问题,导致了珠算的进一步发展.16~17世纪有关珠算的书籍很多,其中程大位的《直指算法统宗》是一本比较完备的应用算术书,流传最广,一度几乎户藏一册.由于珠算盘携带方便,拨动自如,与口诀相配合,计算迅速准确,是当时世界上最好的计算工具,直至电子计算机高度发展的今天,仍有着良好的国际市场,这不能不算是当时的一大成就.

明末清初,西方数学虽然受到封建统治阶级的排斥与禁锢,但还是通过传教、经商等途径陆续传入中国.

这一时期以意大利传教士利玛窦来华为起点.1581年,利玛

窦以西方近代数学及其他科学知识为敲门砖，踏入中国进行传教活动. 他精通汉语，1600 年与擅长中国传统数学并对西方数学有强烈兴趣的徐光启相识，便相约共同研究介绍西方科学. 1606 年，由利玛窦口授，徐光启笔述，翻译了欧几里得《几何原本》前六卷，这是翻译西方数学书籍的开始. 利玛窦还和李之藻以同样的方式编译了《同文算指》(1613 年)，这部书对中国算术影响较大，从此笔算的应用日益普及.

入清以后，由于这种学习西方先进科学文化的方式得到了统治者的默许，各种西方科学知识的译著大量涌现. 在数学方面，较著名的是英国传教士伟烈亚力与李善兰合作翻译的《几何原本》后九卷. 在较为开明的康熙皇帝的支持下，自 1690 年至 1721 年，由法国传教士协助梅瑴成等人编写的《数理精蕴》，堪称介绍西方初等数学知识的"百科全书"，它包括了几何学、三角学、代数学及算术等，成为当时人们学习研究西方数学的重要源泉，后来还逐步传入了对数法、平面三角、球面三角以及部分圆锥曲线等，但由于传教士自身的科学文化水平有限，真正代表当时西方数学水平的微积分理论和系统的解析几何理论并未能及时传入中国.

西方数学知识的传入，给濒于死亡的中国传统数学注入了新鲜的血液，使之由衰落开始转入复苏. 这时的数学研究工作出现了两个倾向，一是对西方传入的数学进行整理、加工、消化、吸收；二是重新钻研整理中国的传统数学.

清初杰出的天文学家、数学家梅文鼎(1637～1721)以实事求是的态度整理加工西方数学，融会中西数学的精粹，编撰了《梅氏历算全书》，计 30 种 75 卷，涉及初等数学各个分支，对中国数学的发展起到了承前启后的作用，与他同代的王锡阐著有《圜解》，为中国自著最早的三角学著作之一. 他们二人的工作，不仅使明代以来衰微的传统数学重新获得生机，而且使西方传入的数学在中国生根、开花、结果.

继梅、王之后,数学研究在中国又出现了高潮,数学家与数学著作层出不穷,据记载,这一阶段有 500 多位数学家撰写了 1000 多种数学书籍,比较重要的有以下几种:

年希尧著有《测算刀圭》、《面体比例便览》和《视学》等.其中《视学》是一部有关透视学和画法几何的著作,其水平很高,特别是关于画法几何的研究,比被称为"画法几何之父"的法国数学家蒙日的《画法几何学》(1799 年)还早 70 年.

蒙古族数学家明安图"积思 30 余年,著《割圆密率捷法》四卷",在证明幂级数表达式及圆周率、正弦、正矢公式上取得突破性的成就,特别是他独立发现的一些幂级数公式,可与他同时代的欧拉分享殊荣.

此外,焦循对算术运算律的总结;董祐诚、项名达、戴煦在级数和对数理论方面的研究;汪莱、李锐等人对传统方程论的阐述等,都有着十分杰出的成就.

1840 年,鸦片战争后,李善兰、华蘅芳等人在翻译介绍西方数学方面又做出了杰出的贡献.

到了 20 世纪初,中国沦为半封建半殖民地,受世界先进的现代科学文化的影响,中国传统数学除了少数数学史工作者外已无人问津,数学教科书与西方已大致相同,中国数学开始走上世界化的道路.

总而言之,中国传统数学源远流长,常汲不竭.长期以来,人们谈论数学,言必称希腊,这是不公平的.其主要原因是人们对中国传统数学与希腊数学迥然不同的风格认识不足.由于中国传统数学自身的历史渊源和独特的发展道路,决定了中国传统数学具有以下一些重要的特点:

(1)追求实用

与古希腊数学追求纯粹的"理念"形成强烈的对比,中国传统数学具有浓厚的应用色彩.通观中国古典数学著作,几乎都与当时

社会生活的实际需要有着密切的关系. 例如,她的产生与天文历法结下不解之缘,并且一直影响着数学的发展. 在中国数学史上最有影响的"算经十书"中的《周髀算经》就是一部天文学著作,秦九韶《数书九章》的"大衍求一术"就产生于历法计算中上元积年的推算,又如"招差术"也是由于推算日、月、五星的行度的需要而创立的.

(2)注重算法

中国传统数学实用性的特点,决定了它以解决实际问题和提高计算技术为主要目标,因此,它的成果都表现为算法的形式. 事实上,中国古代数学著作大多沿用"问－答－术"的体例,其中这些术就是解决该类问题的程序化算法. 在演算技巧方面,中国古代数学家们善于运用演算的对称性、循环性等特点,将演算程序设计得十分简捷、巧妙. 例如方程术、开方术、增乘开方术、大衍求一术等在筹算程序的设计方面都达到很高的水平. 中国传统数学的这一特点,目前已越来越多地引起国内外有关专家的兴趣与注意.

(3)寓理于算

中国传统数学注重算法,并不等于她就没有逻辑推理,没有建立起自身的理论体系. 刘徽的《九章算术注》堪称中国传统数学理论的典范. 他主张"析理以辞,解体以图". 因此,在他的"注"中,定义明确而精辟,推理严谨而巧妙,大量地使用了归纳和演绎的推理方法. 例如,他利用面积的割补来证明整勾股数的一般表达式,处理方式简明扼要,并且,由于他的工作而发展起来的中国传统几何理论完全建立在"出入相补"等几个为数极少而又十分简明的原理之上,这与欧几里得几何体系的手法是十分相似的. 此外,中国传统数学中给出的诸如球体积、重差术等复杂而又精确的公式,很难设想,不经过一定的推理而仅凭经验的总结就可以得到. 由于中国传统数学以追求实用为主,明"法"隐"理",一般数学著作只叙述一个个算法,而其算理常常隐而不显,这就难免要使人们产生这样或

那样的错觉了.

鉴于如上所述的各个方面,中国著名数学家吴文俊先生曾经指出:"克莱茵写了一本《古今数学思想》,他把印度作为古代东方数学的代表,而忽略了中国,其他许多外国数学史书也有类似的倾向.其实,真正代表东方数学的应该是中国."近年来,经过国内外数学史家的工作,这一观点已逐步得到证实.实际上,我们学习和研究中国数学史,不仅能帮助我们从中国传统数学所经历的兴衰过程中吸取经验教训,而且能激发我们强烈的爱国主义热情,刻苦攻关,使中国数学得以迅速发展,使中华民族在数学领域中重新走到世界前列.

# 6 《九章算术》与它的注释者们

《九章算术》是中国传统数学的开山之作.它对后来中国传统数学发展的影响是十分重大的.可以这样说,一直到清代,中国传统数学在某种程度上都是在《九章算术》的基础上拓展开来的.它丰富的内容成为中国传统数学家们学习与研究数学的源泉;它独特的编排体系成为中国传统数学著作效仿的楷模.特别是一些数学家在研究与注释《九章算术》的同时,又进一步完善了这一著作的体系与理论,丰富与发展了它的数学思想方法与数学成果.因此,了解《九章算术》的内容和它的注释者们的工作,就可以在一定程度上了解中国传统数学发展的概貌.

## 6.1 《九章算术》简介

《九章算术》是中国流传至今最古老的数学专门著作之一,其作者不详,大约成书于东汉初年.它采用问题集的形式,书中每道题皆有问有答有术,其中"术"就是解题方法,有的一题一术,有的多题一术,有的一题多术,全书基本上都是与生产实践、日常生活有联系的实际应用问题.这些问题分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程和勾股九章.

"方田"是《九章算术》的开卷章,全章包括38题21术,主要论述了各种平面图形的地亩面积算法及分数的运算法则.其中,平面图形有方田(长方形田地)、圭田(三角形田地)、邪(斜)田(直角梯形田地)、箕田(等腰梯形田地)、圆田(圆形田地)、宛田(说法不一,

未有定论)、弧田(弓形田地)、环田(圆环或环缺形田地)的面积算法,除宛田、弧田是近似计算方法外,其他各种图形的面积算法都是正确无误的.分数运算法则包括约分术(约分与通分)、合分术(分数加法)、减分术(分数减法)、课分术(两个分数的大小比较)、平分术(求几个分数的算术平均值)、乘分术(分数乘法)、经分术(分数除法)和大广田术(带分数除法),这些算法也都是正确的,且与现今的计算方法在理论上是一致的.

"粟米"章计有46题33术,主要论述了20种粮食及其成品如稻、米、麦、面、饭等之间的兑换比率及四项比例算法.四项比例算法当时称为"今有术",其计算方法是:所求数=(所有数×所求率)/所有率,这里,所有率、所求率、所有数与所求数是比例算法的四个专用名词.如"已知麦与米的比率是3:2,现有麦子60斤,问能兑换大米多少斤?"在这个问题中,所有率是麦子的比率3,所求率是大米的比率2,所有数是已有麦子的斤数,所求数就是欲求的大米斤数,这样,按上述公式,能兑换大米的斤数为$(60\times 2)\div 3=40$(斤),《九章算术》还将这一算法用于解决一些更复杂的问题.

第三章"衰分"计有20题22术,主要论述配分比例算法,其中问题多与商业、手工业及社会制度有关.例如第一问:"今有大夫、不更、簪袅、上造、公士五人,共猎得五鹿,欲以爵次分之,问各几何?"大夫、不更、簪袅、上造、公士是五种官爵,其分配原则是位高者多得,位卑者少得,故按大夫5、不更4、簪袅3、上造2、公士1的比率分配.其解法相当于

大夫得$\frac{5}{1+2+3+4+5}\times 5=\frac{5}{3}$(头),

不更得$\frac{4}{1+2+3+4+5}\times 5=\frac{4}{3}$(头),

簪袅得$\frac{3}{1+2+3+4+5}\times 5=1$(头),

上造得$\frac{2}{1+2+3+4+5}\times 5=\frac{2}{3}$(头),

公士得 $\frac{1}{1+2+3+4+5}\times 5=\frac{1}{3}$(头).

第四章"少广"计有 26 题 16 术,论述开平方、开立方的问题.

第五章"商功"计有 28 题 24 术,主要论述各种立体图形的体积算法,其中包括柱、锥、台、球体等,内容涉及筑城、修堤、开渠、粮垛等施工方面的计算问题.

第六章"均输"章计有 28 题 28 术,主要论述较为复杂的配分比例问题.其中最引人注目的是"均输术".这是我国古代实行的"均输制"在数学上的反映,主要解决按人口多少、路途远近、谷物贵贱等条件,平均缴纳赋税或摊派徭役等实际问题,这很类似于条件极值问题.

第七章"盈不足"计有 20 题 17 术,主要论述盈亏问题的解法.盈不足的典型问题是这样的:若干人共买一物,若每人出 $a_1$ 钱,则多出 $b_1$ 钱;若每人出 $a_2(a_2<a_1)$ 钱,则又不足 $b_2$ 钱,求人数与物价.《九章算术》给出的方法相当于公式:

人数 $=(b_1+b_2)/(a_1-a_2)$,

物价 $=(a_1b_2+a_2b_1)/(a_1-a_2)$.

这一方法除了对于线性问题给出精确的解外,也为非线性问题提供了一个有效的近似解法.如"双鼠穿垣"题,讲有一大一小两只老鼠在城墙两边同时开始相向打洞,大、小鼠第一天皆各打洞一尺,但大鼠以后每天打洞的进度皆是前一天的两倍,而小鼠的进度仅是前一天的一半,问需多长时间此二鼠才能打穿厚五尺的城墙相逢.依照题意,设两鼠相逢日数为 $x$,则有

$$\frac{(2^x-1)}{(2-1)}+\frac{1-\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{2}}=5,$$

化简后为一指数方程,解之需用到对数知识,而《九章算术》的作者通过对 $x$ 值的两次假设,将其转化为盈不足问题,求出其近似解

为 $2\frac{2}{17}$ 日相逢.由此可知,这一方法具有一定的实用价值.

第八章"方程"计有18题19术,主要研究线性方程组的解法,其基本思想是消元.在解方程组时,将方程组的系数分离出来排成一个数表,相当于现代线性代数中的增广矩阵,然后通过类似于矩阵变换的方法消元,这一思想方法在数学发展史上是非常重要的.这一章的另一个重点就是对负数的概念、运算进行了研究.

第九章"勾股"计有24题22术,主要讨论有关勾股问题的解法,并论及简单的勾股测量.

《九章算术》对于每类应用问题,都有统一的解法,这些解法相当于一些初等数学定理和公式,但没有证明,其解法大都正确,其中举世公认的数学成就有:

(1)对分数、负数及其运算的论述是世界上最早也是最系统的,不仅早于欧洲千余年,比算法体系形成较早的印度也早了近800年;

(2)解线性方程组的消元法;

(3)有关比例的一些算法;

(4)某些面积与体积的计算,以及勾股测量计算.

这部著作注重实际问题和长于计算的特点,对中国传统数学的发展有着极其深刻的影响,可以说,与西方数学的演绎推理相映生辉的具有中国特色的算法体系即始于《九章算术》.

《九章算术》成书以后,便成为中国传统数学的经典,特别是唐代以来,经官方认定该书成为"算经十书"中最重要的一部,成为后来的数学家们学习、研究和著述的依据,其中刘徽就是《九章算术》注释者成就最杰出的一个.

## 6.2 刘徽与他的《九章算术注》

数学史界的一个普遍的观点是,如果离开了刘徽的《九章算术注》去研究《九章算术》,则很难深入理解《九章算术》的精髓.事实

上,刘徽的《九章算术注》对于阐发《九章算术》的思想方法,发展《九章算术》的理论,完善《九章算术》的体系,作出了许多杰出的贡献.

刘徽,魏晋时期人,祖籍淄乡(今山东临淄或淄川一带),生卒年月不详,他年少好学,尤其喜爱数学.在当时的数学著作中,《九章算术》的不少数学问题难度较大,理论色彩也较浓,如"方田"章的分数体系,"少广章"的开方术,"方程"章的线性方程组解法与正负数的概念、运算法则,"勾股"章中的勾股应用等,一般学者难以掌握,为了进一步探索数学的奥秘,让更多人掌握数学,他立志要对《九章算术》作更深入的研究.

经过多年的刻苦钻研,刘徽不仅逐步领会了《九章算术》的精神实质,而且对其中的深奥玄妙之处有了较透彻的理解,于是他决心把自己的研究所得以对《九章算术》作注的形式一一记载下来.为了使自己的叙述通俗化,他为自己规定的目标是用言辞来分析与表达道理,用图形来建立几何直观帮助解决问题.具体地说,就是要对《九章算术》中未加论证的公式(方法)和原理从理论上加以证明或阐说,特别是对其中的经验公式或错误公式分别从理论上指出它的近似程度或错误原因,并提出一些理论推断.对于几何概念和命题,则借助于图形和应用代数与几何相结合的方法,进行一般论证或演绎推理.

公元263年(魏陈留王景元四年),刘徽的《九章算术注》终于问世了,书中载录了刘徽在数学上的许多重要贡献.

在算术方面,刘徽阐发了《九章算术》中的分数理论.他的分数的意义、表示方法、运算法则等代表了当时世界上的最高水平,并已接近于近代的成熟程度.他把分数看作比,由此发展出"率"的概念.又在"率"的基础上提出了算术中的比例理论、"盈不足"方法等,成为中国传统算法理论发展的重要基础,并传入印度、阿拉伯和欧洲,对这些地区数学的发展产生了较大的影响.

在代数方面,我们已经说过,《九章算术》中的线性方程组解法

以及正负数加减运算是当时世界上无与伦比的两项重大成就.前者比欧洲早1500年,后者也早了1200多年,而给这两项算法以完整的理论说明的正是刘徽,他第一个给出了方程的定义并揭示了方程组的同解原理.对于正负数,刘徽的定义可以说是经典性的.他把正与负看成是相对存在的数的两种情况,从这一认识出发,刘徽在世界数学史上第一个采取了把数的正负与加减运算关系统一起来的做法.他还运用平面与立体图形对中国古代的开平方与开立方法作出了直观解释,这种方法对于帮助读者正确理解与掌握开方程序是非常有益的.此外,他由取平方根的近似值而提出的小数概念和表示方法,不仅明显具有近代特征,而且比欧洲最早的小数——斯蒂文(Stevin, Simon 1548～1620)的小数记法要早出1300多年.

在几何方面,刘徽的贡献尤为突出,他是具有中国特色的传统几何理论的奠基者.他以别具一格的证明方法对中国古代提出的几何命题予以科学的证明,这些方法包括"图形割补法"、"代数法"、"极限法"以及"无穷小分割法"等等,其中最常用的是图形割补法,这与他提出的"解体以图"的目标是一致的.刘徽对用图很考究,不仅对插图施以颜色,用黄、朱、青三种颜色标出各种不同的图形,而且强调要"按图为位",使图形与文字互相对照.刘徽为证明立体的体积公式所采用的立体图形割补法尤其出色,后面我们将通过他对"开立圆术"的注释重点予以说明.在考虑四面体体积时,刘徽甚至提出了与现代数学史上著名的希尔伯特23个数学问题中的第三个问题即两个等底等高四面体的体积相等相一致的认识.

众所周知,刘徽还是中国数学史上第一个把极限思想运用于数学计算的人.他创造的求圆面积和圆周率的"割圆术",不仅作为一种普遍的方法被应用于有关圆的计算中,而且为中国取得圆周率计算史上的领先地位奠定了基础,他本人就使用"割圆术"求得$\pi\approx3.14$,这在中学数学教材中已作介绍,这里不再赘述.

刘徽不仅注重数学的理论研究，而且也注重数学的实际应用．他在注《九章算术》的同时，还深入实际处理了许多测量问题．他的另一部著作《海岛算经》，就是在测量的具体实践过程中总结而成的关于“测高望远之术”的专著．

刘徽一生不仅成就卓著，而且品格高尚，在学术研究中，他既不迷信古人，也不自命不凡，而是坚持实事求是，以理服人．如在圆周率问题上，《九章算术》提出“径一周三”，此后的学者亦步亦趋，皆以此入算，刘徽则通过简单的推导，指出这样得到的周长只是圆的内接正六边形的周长而不是圆周长．又如少广章的“开立圆术”，《九章算术》给出的方法相当于公式 $V=\frac{9}{16}D^3$（这里的 $D$ 为球直径），刘徽对这一公式的正确性产生了怀疑，他娴熟地使用截面法进行了验证，发现内切圆柱与正方体的体积之比为$\frac{\pi}{4}$，在《九章算术》取 $\pi\approx3$ 的情况下，只有在内切球与圆柱的体积之比也是$\frac{\pi}{4}$时，上述近似公式才成立，而实际上后者是不成立的．为了说明这一点，刘徽又引入了一种新的立体：以正方体相邻的两个侧面为底分别作两次内切圆柱切割，剔除外部剩下内核部分，刘徽称之为“牟合方盖”．他用截面法证明了内切球与“牟合方盖”的体积之比为$\frac{\pi}{4}$，而明显地可以看出，“牟合方盖”的体积比圆柱要小，故上述公式是错误的．显然，如果能求出牟合方盖的体积，球的体积就自然可以求出了，但对于牟合方盖的体积如何求出，刘徽百思不得其解，故最后不得不“付之缺疑，以俟能言者”．由此我们可以看出刘徽学术研究中的严谨与谦逊的态度，也许正是这二者的结合，使得刘徽在数学研究方面做出了举世瞩目的成就，给后人留下丰富的文化财富．

## 6.3 祖冲之与祖暅

在刘徽以后的200多年,中国的历史上出现了一对父子数学家,这就是祖冲之、祖暅父子.

祖冲之(429~500),字文远,祖籍范阳遒县(今河北涞水县).他生活在南北朝,家学渊博,加上他自幼刻苦勤奋,对天文、数学有浓厚的兴趣,而成为一位博学多才的天文学家与数学家、机械制造专家、文学家.他编制的《大明历》,首次考虑到岁差的计算,其日、月运行周期的数据也比当时颁行的历法精确.此外,他还改造了指南车,制造了水碓磨、千里船等.他的儿子祖暅,字景烁,也精通历法、数学.父子俩都对《九章算术》与刘徽注有浓厚的兴趣,他们的著作《缀术》在唐代曾被收入"算经十书"作为数学教科书,但后来失传.据猜测,这也就是他们的《九章算术》注.

祖冲之继承了刘徽的思想,其最突出的成就是对圆周率值的推算.《隋书·律历志》记载着他对圆周率的研究成果

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

由于中国古代习惯使用分数,故祖冲之又给出了圆周率的两个分数值:密率为$\frac{355}{113}$;约率为$\frac{22}{7}$.其中密率在欧洲由德国数学家奥托(1550~1605)于1573年得到,这比祖冲之要晚1100年之久.密率是一个很好的分数近似值,如果用它来计算半径为10公里的圆的面积,其误差仅几个平方毫米,可见其精确度是很高的,此外还非常简单好记,只需将自然数中前三个奇数各重复一次按大小顺序排成113355,并对半分开后上下排列即可.

前面我们在介绍刘徽的《九章算术》注时,曾着重谈到刘徽对球体积计算公式的处理,刘徽给后人留下了一个难题,即如何计算"牟合方盖"的体积.祖氏父子在研究《九章算术》及刘徽注时发现了刘徽遗留下的问题,并开始沿着刘徽开辟的道路继续探索.经父子两代人不懈的努力,终于由祖暅解决了牟合方盖体积的计算,得

到牟合方盖与其外切正方体的体积之比为$\frac{2}{3}$，而刘徽已经知道球与它的外切牟合方盖之比为$\frac{\pi}{4}$，这样，$V_{球}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}D^3=\frac{\pi}{6}D^3$. 祖氏父子所用的方法论证严谨、推导完善，无懈可击. 同时，祖暅还将其推导过程中所用的，事实上也是刘徽已经使用过的不可分量原理，总结提炼成一般的命题："缘幂势既同，则积不容异"，这实际上也就是西方数学界所谓的"卡瓦列利原理". 从时间上来看，即使是祖暅，也比卡瓦列利总结出这一原理要早1000多年.

由于祖氏父子的著作均已失传，他俩的这一研究成果幸亏被唐代李淳风摘录在《九章算术》商功章开立圆术刘徽注的后面，才使我们得以见到这一光辉成就.

## 6.4 其他的注释者

除了刘徽和祖氏父子以外，在《九章算术》众多的注释者中，值得一提的还有李淳风、贾宪、杨辉、焦循和李潢等人.

李淳风是唐代著名的天文学家和数学家，唐贞观年间入太史局，后升任太史丞、太史令，受唐高宗之命为明算科选定"算经十书"，李淳风等将《九章算术》列入其中，并为之作注，除了个别之处，如摘录了祖氏父子的球体积公式的推导等，总体来说，李淳风的注释的水平不高，有些地方较之刘徽甚至出现了倒退，但经过他的注释，《九章算术》本文、刘徽注和李淳风等人的注释融为一体并流传下来，而关于《九章算术》其他的注释逐渐散失，此后《九章算术》的研究者们均以刘、李注释本为底本.

李淳风之后直至宋初，未见有关为《九章算术》作注的记载. 11世纪上半叶，北宋贾宪撰写了《黄帝九章算术细草》九卷，这本书现已失传，从现存有关资料看，这是一部极其重要的数学著作. 例如，他把《九章算术》提出的传统的开平方、开立方法推广到开任意次方，给出了一个"开方作法本源"图，实际上就是二项式定理系数表，并在此基础上进一步提出了"增乘开方法"，这是一种通过减根

变换求解方程的方法,其原理与综合除法相同.还有一个显著的特点就是,贾宪对《九章算术》中某些含有具体数字的算法进行了进一步的抽象,提出了纯数学的方法,这为中国传统数学向符号化迈进奠定了基础.我们之所以能知道这一些,完全归功于另一位数学家杨辉.

杨辉是《九章算术》的另一位注释者,1261年,他撰成了《详解九章算法》,全书十二卷,按内容可分为三类:第一类内容是卷首的图(已不存在)及卷一的"乘除",这是全书的入门.第二类内容是卷二到卷十,抄录了《九章算术》九章的本文及刘徽注、李淳风等注和贾宪细草,并对其中80问作了详解,包括"解题"和"比类"."解题"的内容较为广泛,有的是对术文本身作出解释,有的则介绍了术文的应用,有的还指出了问题原本的类型."比类"是杨辉的一个创新,在其中,他将其他算书中的问题或两宋时期新出现的数学方法与《九章算术》中的某些方法进行比较,引申出许多重要公式,特别是高阶等差级数问题.第三类内容是末卷的"纂类",在这里他试图将《九章算术》中的术文与问题按数学方法而不是按应用重新分类,从而第一次突破了《九章算术》的框架,这也是一个创举.

入清以后,由于西方科学的传入,刺激了中国士大夫阶层的民族自尊心,研究传统数学一度掀起一个高潮,主要表现为对中国古代传统数学典籍的研究,《九章算术》即是其研究重点之一.乾隆嘉庆年间的扬州学者焦循就是研究《九章算术》的学者中较有创见的一位.他在深入研究了《九章算术》的各种算法以后,认为这些算法都可以用加减乘除四则运算统一处理,故他撰写了《加减乘除释》,用甲乙丙丁等天干文字来代替具体的数字,从而抽象出许多运算法则,成为这一时期中国传统数学研究中为数不多的重要创见之一.

除了焦循以外,与他同时代的另一位数学家李潢也曾撰写过一部《九章算术细草图说》,成为后人研究《九章算术》不可缺少的重要参考书.

# 7 中国剩余定理

留心数学的人也许会有这样一个印象：数学领域是外国学者的天下．可不是吗？您看，大到一门学科，如欧几里得几何、黎曼几何、李代数、布尔代数……；小到一个具体的问题、定理、法则，如哥尼斯堡七桥问题、哥德巴赫猜想、高斯定理、笛卡儿法则……，几乎都与外国地名、人名联在一起．人们不禁要问，在令人眼花缭乱的众多的数学成果中，哪些是属于中国数学家的贡献呢？本章就重点给大家介绍一下"中国剩余定理"．

## 7.1 孙子问题

在4－5世纪，中国出现了一本数学著作——《孙子算经》．其具体的成书年代与作者姓名已不可考．这是继《九章算术》之后又一部重要的数学著作．传本《孙子算经》分上、中、下三卷．卷上叙述度量衡制度、筹算记数和筹算乘除运算方法；卷中举例说明筹算分数算法和开平方算法，以及简单的面积、体积计算；卷下是各种应用问题，涉及田域、仓窖、营建、赋役、军旅等．从其内容特色来看，它以实际应用为主，注重计算技术，题目通俗有趣，解法巧妙简便，在中国古代数学著作中是很有代表性的．

《孙子算经》之所以成为流传千古的著名数学典籍，还因为它最早记载了举世闻名的"孙子问题"，这就是卷下第26题，也即全书的最后一题，原文是这样的：

"今有物不知数．三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩

二，问物几何？”

其意思是：有堆东西不知有多少，如果三个三个地数，最后余下两个；五个五个地数，最后余下三个；七个七个地数，最后余下二个，问这堆东西共有多少？

这类问题在中国古代数学史上是经常碰到的，不过由于问题的提法不同而赋予不同的名称，如“鬼谷算”、“秦王暗点兵”、“剪管术”、“隔墙算”等等．这些表面上看似乎是一种游戏，但却包含了深刻的数学思想．把上述问题用同余式组表示出来就是

$$x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7),$$

求 $x$，这里 $a \equiv b(\mathrm{mod}\ p)$ 表示 $a$ 与 $b$ 同时被 $p$ 除所得的余数相同．

《孙子算经》的解答原文如下：

“答曰：二十三．

“术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得．

“凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五；一百五上，以一百五减之，即得．”

这段原文隐晦难懂，但它却揭示了这类问题解法的关键是要找出 70，21，15 这三个常数，为什么呢？因为 70 不仅是 $5\times7$ 的倍数(2 倍)，而且被 3 除余 1；21 不仅是 $3\times7$ 的倍数(1 倍)，且被 5 除余 1；15 不仅是 $3\times5$ 的倍数(1 倍)，且被 7 除也余 1，即

$$70 = 2\times5\times7 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 5) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7), \quad (1)$$

$$21 = 3\times7 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7), \quad (2)$$

$$15 = 3\times5 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 5) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7). \quad (3)$$

由题设，用 3、5、7 分别除以 $x$ 所得的余数为 2、3、2，故用 2、3、2 分别去乘(1)、(2)、(3)式，再相加即得

$$233 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7).$$

这表示 233 是满足条件的 $x$ 的一个解. 为了求满足条件的最小解, 可用 $3\times5\times7=105$ 的倍数去减 233, 得到的差 23 便是所求的解.

后来有人将这一问题的解法写成一首诗歌, 这就是明代数学家程大位的《算法统宗》卷五所载的"孙子歌":

三人同行七十稀, 五树梅花廿一枝,

七子团圆正半月, 除百零五便得知.

"孙子问题"所提出的解法虽然是针对具体问题的, 但具有一般性. 我们容易推广如下:

如要求一个最小整数 $N$, 它被两两互素的 $S$ 个数 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 除时, 余数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$, 仿照上述方法, 首先对每一个 $p_i$ 作

$$N_i = p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_s,$$

然后找一个整数 $R_i N_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ (这里的 $R_i N_i$ 相当于孙子问题解法中的 70, 21, 15). 再将 $R_1N_1, R_2N_2, \cdots, R_sN_s$ 分别与 $r_1, r_2, \cdots, r_s$ 相乘后求和, 设为

$$M = r_1R_1N_1 + r_2R_2N_2 + \cdots + r_sR_sN_s.$$

如果 $M < p_1p_2\cdots p_s$, 则 $M$ 即为所求; 如果 $M \geqslant p_1p_2\cdots p_s$, 则 $M$ 被 $p_1p_2\cdots p_s$ 除后所得的余数即为所求. 这就是数论中著名的"剩余定理".

虽然《孙子算经》记载的"孙子问题"似乎是一个数字游戏, 但古代产生这一问题的背景却是非常深刻的, 这就是天文历法的需要. 例如在制定魏景初历(公元 237 年)时就明确规定, 把冬至、月朔和甲子日零时重合的时刻取作历法起算的原点, 古代历法中称之为"上元". 如果制订历法那一年冬至发生在甲子日零时后 $r_1$ 日, 在月朔后 $r_2$ 日, 那么, 这一年冬至距上元的年数 $x$ 就是同余式组

$$ax \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ 360) \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ b)$$

的解.这里 $a$ 是一回归年的日数,$b$ 是一朔望月的日数.据研究,早在公元前2世纪时,我国就已研究过需要一次同余式才能解决的天文问题.

《孙子算经》可能是作为教科书而编纂成书的,因此,我们可以推想,该书作者把上述天文历法中复杂的问题浅化为一种数字游戏的形式,也是十分自然的.应该指出,当时,对于这类问题的研究只是初具雏型,还远远谈不上完整,其不足之处在于:

(1)没有把解法总结成文,致使后人研究时多凭猜测;

(2)模数仅限于两两互素的正整数,未涉及一般情况;

(3)未能进一步探讨同余式(组)有解的条件等理论问题.

因此,后人把这一命题及其解法称为"孙子定理",主要是推崇《孙子算经》处理这类问题在时间上领先.其思想方法的成熟,还有待于后来的中国古代数学家们的工作.

## 7.2 秦九韶的成就

13世纪,正是西方科学文化处于低谷时期.在东方的中国,却出现了数学繁荣的黄金时代,这就是宋元数学的突起.这一时期,中国数学界人才辈出,论著浩瀚,其中最引人注目的为秦九韶与他的《数书九章》.

《数书九章》列算题81道,分为九类,在数学上有很多创新.其中对同余式的研究,是秦九韶在数学上一个最杰出的贡献,它包括两个方法:一是"大衍总数术",主要介绍一次同余式组问题的一般解法;二是"治历演纪术",专为历元推算设计的演算程序,二者皆基于"大衍求一术".

秦九韶在《数书九章》卷一"大衍总数术"中推广了"孙子问题"的解法.为了避免对秦九韶的原文作出生硬的书面翻译,下面我们将采用现代数学语言对他的成就做一个一般的叙述.需要指出,秦

九韶的方法是通过对具体问题的讨论给出的，但具有一般性.

### 7.2.1 同余式的解

秦九韶对同余式 $ax\equiv1(\bmod\ b)$的解法是将 $a$，$b$ 辗转相除，秦九韶称之为“更相减损”，除至余数为 1 时停止. 设商数序列是 $q_2, q_3, \cdots, q_{n-1}$，$q_n$，再作递推公式

$$j_0=0, j_1=1, \ j_i=q_ij_{i-1}+j_{i-2}(i=2,3,\cdots,n),$$

于是，当 $n$ 是奇数时，所求的解为

$$x=j_n=q_nj_{n-1}+j_{n-2}.$$

秦九韶不讨论负数解.

### 7.2.2 模数两两互素的同余式组的解

设 $N\equiv r_1(\bmod\ m_1)\equiv r_2(\bmod\ m_2)\equiv\cdots\equiv r_n(\bmod\ m_n)$，

(1) 先求数 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$. 设 $M=m_1m_2\cdots m_n$，作

$$\begin{aligned}\frac{M}{m_i}k_i&\equiv0(\bmod\ m_1)\equiv\cdots\equiv0(\bmod\ m_{i-1})\\&\equiv1(\bmod m_i)\equiv0(\bmod\ m_{i+1})\\&\equiv\cdots\equiv0(\bmod\ m_n),\ (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

这相当于解同余式 $\frac{M}{m_i}k_i\equiv1(\bmod\ m_i)$，

可简化为 $r_i\frac{M}{m_i}k_i\equiv r_i(\bmod\ m_i)$. $(i=1,2,\cdots,n)$

(2) 求和数，由(1)显然有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{M}{m_i}r_i&\equiv r_1(\bmod\ m_1)\equiv r_2(\bmod\ m_2)\\&\equiv\cdots\equiv r_n(\bmod\ m_n).\end{aligned}$$

(3) 假设 $\alpha$ 是问题的最小解，则一般的解可由公式

$$N=\alpha+pM \quad (p\geqslant0)$$

表示. 它由我们上面已经介绍过的类似方法解决.

### 7.2.3 模数非互素的同余式组的解

这是秦九韶对“孙子问题”的推广. 他的方法是：如果同余式组

$$N \equiv r_1 (\bmod m_1) \equiv r_2 (\bmod m_2) \equiv \cdots \equiv r_n (\bmod m_n)$$

中的模数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 不两两互素,则把它们分解为素因数(但秦九韶并没有提出素因数的一般概念)的积,由此求出$\frac{M}{m_1}, \frac{M}{m_2}, \cdots, \frac{M}{m_n}$的最小公倍数为 $1^p \times 2^q \times 3^r \times 5^s \cdots$,据此易求得正整数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$,使它们两两互素,且它们的乘积 $u_1 u_2 \cdots u_n$ 恰好是 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的最小公倍数,并使得 $m_i \mid u_i$,则我们就可将 $N \equiv r_i (\bmod m_i)$用 $N \equiv r_i (\bmod u_i)$来代替,从而把模数不两两互素的同余式组转化为两两互素的问题来解决.通过进一步研究,我们还可以发现,秦九韶的方法与现在通常所说的连分数解法完全一致.

使我们惊奇的是,这类问题的研究虽最早见于《孙子算经》,但秦九韶在《数书九章》自序中却说:他对这一问题的探讨,是由于它"不载《九章》,未有能推之者",所以他才发愤钻研的,至于他是否了解《孙子算经》的内容,全然没有提及.由此我们可以想象,秦九韶的工作尽管可能没有以《孙子算经》为基础,但他青年时代曾随"太史"学习造历知识,必然接触到天文历法中的同余式思想,因此,他的研究是有一定的历史背景的.经过秦九韶的刻苦钻研,终于使解决一次同余式(组)问题的方法形成了较为系统的数学理论,其功绩是十分巨大的.

## 7.3 西方学者的研究

与中国相比,西方数学家对于同余式(组)的研究则要迟得多.意大利学者斐波那契的《算术》(1202 年)中虽有好几道同余式组的问题,但其研究的水平不高于《孙子算经》.从 14 世纪到 17 世纪,西欧数学著作中仅零星出现少量的一次同余式问题.对于这些问题,即使有正确答案,也没有一般的解法.

从 18 世纪上半叶开始,瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler,

1707～1783)、法国数学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736～1813)和德国数学家高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777～1855)等相继开始研究同余式的问题. 1734 年,欧拉在俄罗斯彼得堡学报发表了关于同余式 $ax \equiv 1 \pmod b$ 的解法,他的方法是通过对 $a, b$ 辗转相除来求解的,与秦九韶的"更相减损"思想完全一致. 拉格朗日利用连分数讨论这一问题,他把既约分数化成连分数

$$\frac{b}{a}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cdots\cfrac{1}{u+\cfrac{1}{n}}}}$$

删去最后一项 $\frac{1}{n}$,再化成普通分数 $\frac{y}{x}$,其分子、分母当 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, u, n$ 是偶数个时是 $ax = by + 1$ 的解;当它们是奇数个时,则是 $ax = by - 1$ 的解. 1801 年,"数学王子"高斯出版了他的数学巨著《算术研究》,全书共七章,第二章专门讨论一次同余式及同余式组的解法. 他讨论了模数不两两互素的情形,方法是利用算术基本定理将模数化为素因数的连乘积. 高斯的研究,给出了一次同余式的最一般的定理,使这一理论最终得到完善.

无独有偶,西方对同余式问题的研究也是起源于天文历法,如高斯在《算术研究》中解释某一同余式问题的起源时说:"这一问题是从年序学产生的."

由此可见,在西方,直到 18 世纪,经欧拉、拉格朗日和高斯三代巨匠前后 60 多年的努力,才比较系统地建立起一次同余式的理论. 这在当时的数学界引起了很大的轰动,当时居世界数学中心地位的彼得堡科学院、柏林科学院等竞相刊登这些成果,以示祝贺. 然而他们并不知道,早在 500 年前的东方,相应的成果就已灿烂夺目了. 当然,他们的研究也弥补了中国数学的不足,即做出了更为细致的讨论和严格的证明.

由于客观条件的限制,中国传统数学的这一杰出成就很晚才被西方数学界所知.1839年,毕欧在《亚洲杂志》上发表了一篇关于程大位《算法统宗》的文章,文中论述了“孙子问题”,但这个关于中国剩余定理的最早报道好像在欧洲并没有引起人们的重视.1842年,《数书九章》的“宜稼堂丛书”本出版,这使得正在中国与李善兰合作翻译介绍西方科学文化的英国人伟烈亚力,第一次接触到中国传统数学的原始资料.时隔10年,伟烈亚力在《字林西报》上发表了关于中国科学技术史的论文——《中国科学的论述》,其中论述了《孙子算经》中的“孙子问题”,在这篇论文中,最重要的一点是伟烈亚力首次向西方解释了秦九韶的“大衍总数术”,并介绍了秦九韶的第一道题的全部解说,以及其他问题的一些注记.1856年,伟烈亚力的这篇论文被译成德文发表,于是,中国的“大衍术”开始在欧洲数学界为人们所知晓,但由于伟烈亚力解释的不确切和翻译的错误,人们对这一成就的认识并不充分.当时,德国著名数学史家康托尔在他的《关于数学的历史》一书中就认为:“看来中国人在不定分析研究方面比同时有文化的民族较为逊色.”

首先认识到中国“大衍术”真正意义的是德国人马蒂生.他从1876年开始,发表了一系列论著,高度评价了秦九韶的“大衍求一术”,指出它实质上与高斯定理是等价的,并且订正了德文翻译的错误,给出剩余问题的正确阐述.马蒂生的工作终于改变了欧洲学者对这一问题的看法.例如前面提到的康托尔,在读了马蒂生的论述后,承认这一法则的正确性并由衷地赞美它,称秦九韶是“最幸运的天才”.从数学史的观点来看,一篇最重要的论文是玛赫勒1957年发表的“中国剩余定理”,正是这篇论文首次提出用中国来命名这一伟大的数学成就,以表彰中国数学家们所做出的杰出贡献.这一命名很快就风行全球,并被教科书所采纳.



# 8. 希望的曙光

从15世纪中期到16世纪末，这段时期在欧洲称为文艺复兴时期. 在这一时期，欧洲，特别是西欧，出现了思想大解放、生产大发展、社会大进步的喜人景象，科学文化技术，其中包括数学，也随之开始复苏并逐步繁荣起来. 从此，欧洲的数学开始走到世界的前列，并长期成为世界数学发展的中心. 为了解这一特定历史事件的时代背景，有必要先简略回顾一下欧洲中世纪的黑暗时期.

## 8.1 欧洲中世纪的回顾

从5世纪中叶到15世纪，在科学史和哲学史上称为欧洲的中世纪黑暗时期. 在这1000左右的时间内，整个欧洲特别是西欧，生产停滞，经济凋敝，科学文化落后，既没有像样的发明创造，也没有值得一提的科学著作. 出现这一科学技术大倒退的原因是多方面的.

5世纪，罗马人占领了希腊本土后，他们依靠强权与军队来维持自己对异族的统治，热衷于创立所谓"实业家的文化"，为其统治者豪华奢侈的生活服务. 他们对抽象思维毫不关心，数学研究仅限于简单的几何和测量. 另一方面，这一时期又是基督教绝对统治的时期，为了达到在精神上麻痹奴隶的目的，基督教竭力宣扬"今生忍辱负重，来生进入天堂"的谬论，用死后的幸福生活来欺骗被统治者，要他们安于自己痛苦的命运. 为了不使谎言被揭穿，基督教强烈反对研究与传播自然科学知识，如当时的教皇奥古斯丁就说

过这样的话:"从圣经以外获得的任何知识,如果它是有害的,理应加以排斥,如果它是有益的,那么它就包含在圣经里了."言下之意,一切有益的知识都可以从也只能从圣经中得到.于是,圣经就成了这一时期人们唯一能够学习、研究的"百科全书".

数学是这个时期受到最大排斥的学科之一,因为人们常常把它与异教徒的星相术混为一谈,因此在这个时期的法典中甚至明文禁止学习与研究数学,如罗马皇帝狄奥多西的法典就规定:"任何人不得向占卜人与数学家请教."而6世纪时查士丁尼的法典则更直接了当地称:"彻底禁止应受到谴责的数学技艺."

在这个时期,科学赖以发展的一些主要条件,例如,自由的学术空气、对物理世界的关注、研究抽象概念的兴趣等均已消失.尽管如此,在这一时期也还是有一些坚持学术研究的人物,博埃齐(475~525)就是早期的代表人物之一.他是罗马的一个贵族,曾不顾禁令用拉丁文从古希腊著作的片断中编译了一些算术、几何、音乐、天文的初级读物,他把这些内容称为"四大科",其中的数学著作还被教会学校作为标准课本使用了近千年之久,但博埃齐本人还是遭受政治迫害被捕入狱并死在狱中.

7世纪,在英格兰的北部出现了一位博学多才的神学家,这就是被称为"英格兰文化之父"的比德(673~735).在数学方面,比德曾写过一些算术著作,研究过历法及指头计算方法.当时,对耶稣复活期的推算是教会讨论最热烈的课题之一,据说,这位比德大师就是最先求得复活节的人.

在这个时期最出色的数学家是意大利的列昂纳多·斐波那契(1170~1250),他的父亲是比萨驻阿尔及利亚的商业代表,故他随父亲在那里受到教育,并曾在埃及、叙利亚、希腊以及西西里岛等地游历,在这些地方,他获得了许多数学知识,对印度-阿拉伯计算方法的实用性尤为欣赏.1202年,斐波那契综合阿拉伯和希腊资料著成一部重要著作《算盘书》,这部著作共15章,主要介绍算

术与代数,内容非常丰富,包括:印度-阿拉伯数码的读法与写法;整数与分数的计算;平方根与立方根的求法;线性方程组和二次方程的解法等,书中还给出了数学在实物交易、合股、比例法和测量几何中的应用.著名的"斐波那契数列"就起源于这部著作中的所谓"兔子问题":假定大兔子每月生一对小兔,而小兔两个月长成大兔,那么问,自一对兔子开始,一年后可繁殖多少对兔子."斐波那契数列具有许多重要的性质及应用,尤其是当项数 $n$ 无限增大时,其前项与后项之比 $u_{n-1}:u_n \to \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$,这便与被开普勒说成是几何学宝藏之一的黄金分割联系起来.在18世纪创立的循环级数理论中,斐波那契数列成了主要内容,直到现在,美国尚有《Fibonacci季刊》专门刊载这个数列性质的最新成果.此外,斐波那契还写过一部纯几何著作《实用几何》,书中运用欧几里得等人的方法介绍了直线形的面积、圆的度量、球和圆柱等.

在这个时期像这样的学者虽然还可列举出一些,但他们的成就与古希腊大师们相比,实在是太微不足道了.他们的工作在那样的黑暗时代没有也不可能产生多大的影响,正像一朵朵小小的浪花,在狂热的宗教洪流中稍纵即逝.

但历史总是要发展的,人们对长达1000年之久的黑暗统治已经忍无可忍,社会的、政治的、经济的和文化的种种原因,使得这一黑暗时期终于走到了尽头,取而代之的是一场规模宏大的文艺复兴运动.

## 8.2 欧洲文艺复兴时期的数学

15世纪,随着拜占庭帝国的瓦解,难民们带着包括古希腊文化在内的财富逃亡到意大利,使得意大利学者能直接学习与研究反映古希腊人杰出成就的原始经典著作,而在此之前,他们所接触的只是一些水平不高的阿拉伯文译本,古希腊大师们深刻的思想

震撼了这个富有创造力的民族.

从社会发展的角度来看,这个时期欧洲的封建制度开始解体,新兴的资产阶级逐渐走上历史舞台.为了维护与发展自身的利益,他们首先在意识形态领域中展开了反对封建宗教神学的文化斗争.他们打出复兴古典文化的旗帜,但决不是想回到古代去,而是要从古代文化中汲取那些适合资产阶级需要的思想,造就一种新的世界观和意识形态,以便与封建制度的精神支柱——宗教世界观相抗衡.另外一方面,欧洲人由于受宗教禁锢的时间太久了,他们渴望了解外部的世界,这就使得他们的航海技术达到了前无古人的地步.1492 年哥伦布发现了美洲大陆,1499 年卫斯普奇横渡大西洋,在同一世纪中麦哲伦又环航了地球,这些都给欧洲人打开了一个个通向外界的窗口,异族丰富多彩的文化又给欧洲以强烈的刺激.

所有这些都使得欧洲产生了史无前例的文化复兴运动.这一运动首先起始于意大利半岛,继而蔓延到整个欧洲.在这片沉寂了近千年的土地上,呈现出一派生机勃勃的景象,其直接后果是造成了欧洲近代科学和文化艺术的解放与繁荣.

数学作为其他学科的基础,加上她在古希腊文化中的崇高地位,在欧洲的文艺复兴中受到了广泛的重视.15 世纪欧洲的数学活动多半是以意大利城市和中欧城市纽伦堡、维也纳、布拉格等为中心展开的.受商业、航海、天文和测量等影响,数学研究也集中在算术、代数和三角学方面.从地理位置与时间上来看,欧洲数学首先在意大利和德国崛起,德国人的贡献主要在天文学与三角学,而意大利人的卓越之处在于代数学的发展.法国直到 16 世纪末才显示出她的力量,主要包括韦达、笛卡儿、帕斯卡和费尔马等人的工作.

尼古拉(Nicholas,1401～1464)可以说是 15 世纪的第一个知名度较高的数学家.他曾先后在海德堡大学和帕顿大学学习过,

1449年任红衣主教.他研究过神学、数学、天文学、地理学、力学、哲学和法学,对古希腊的学术思想做过较为深入的探讨,是自然科学与数学的研究中运用实验方法的倡导者.在数学方面,他认为“化圆为方”是不可解的,同时又给出了这一问题的简单而又相当精确的近似解法,这一方法初步涉及无穷小等概念.

这个世纪最有影响、也是最有能力的数学家是穆勒(Muller,1436~1476),人们更多的是以他的出生地哥尼斯堡这个城市的拉丁文名字雷琼蒙塔努斯(Regiomontanus)来称呼他.年轻时,他曾就学于波伊尔巴赫,在协助老师翻译希腊数学著作的过程中,对数学产生了浓厚的兴趣,自己也独立翻译了阿波罗尼斯、海伦和阿基米德等人的著作,并由此走上了数学研究的道路.穆勒在许多数学领域中都有建树,其中对三角学的贡献最为杰出.在1461~1464年间,他完成了《三角全书》,这部著作共5卷,将平面三角与球面三角放在一起处理,给出了球面三角的余弦定理和正弦定理,对于如何解平面与球面三角形作出了较为全面的论述.他还编制了一个五位数的正切函数表.我们知道,过去希腊人仅把三角学看作是天文学的一个分支,通过穆勒的工作使三角学脱离了天文学而成为一个独立的数学分支.此外,穆勒还使用代数的方法研究过许多几何问题,为150年后笛卡儿的研究开拓了方向.

与德国数学家相比,意大利人对代数似乎有更浓厚的兴趣,这与意大利早期数学家工作的着眼点有关.1494年,《算术、几何及比例性质摘要》一书出版,这是意大利修道士帕西奥里(Luca Pacioli,1454~1514)的著作,全书共两篇,上篇专门讨论算术和代数,下篇研究几何,书中包罗了当时欧洲的各种数学知识.帕西奥里还追随穆勒用代数方法研究几何,由于帕西奥里曾任米兰大学数学教授,并先后在罗马、波伦那、那不勒斯、佛罗伦萨和威尼斯等地讲授过数学,故具有较大的影响,因此他的上述著作也在许多年中一直被认为是数学方面的标准论著.

意大利天才的画家、雕塑家、建筑师和机械专家列昂纳多·达·芬奇(Leonardo da Vinci,1452~1519)也是一个数学家,他的一生大多是在佛罗伦萨度过的.他对数学的评价是很高的,他曾经说过:"任何人的研究,没有经过数学的证明,就不能认为是真正的科学."有关素描艺术和力学的问题激发起他数学研究的兴趣,其中对前者的研究使透视理论与射影几何开始步入了数学大家族.事实上,这一分支的创立正是由于达·芬奇为首的一批意大利艺术家完成的,因为他们所面临的课题是将现实的三维世界反映到二维的画布上去.此外,他还深入研究了一些等积问题,他对"化圆为方"这古老的尺规作图问题的解决办法,就很具艺术家的特点:把一个高为底面半径一半的圆柱在平面上滚动一周所得到的侧面展开图是一个矩形,这个矩形的面积与圆柱底面圆显然是相等的.

## 8.3 意大利学者关于三、四次方程解法的研究

16世纪最为壮观的数学成就要数意大利的数学家们关于三、四次方程解法的研究.前面已经提到过的帕西奥里认为,求解方程 $x^3+mx=n$ 与 $x^3+n=mx$ 在当时与化圆为方一样,是不可能的,并把这一看法写在他的《算术、几何与比例性质摘要》一书的末尾.

波仑那大学的数学家们首先攻克了这一难题.大约在1515年,该大学的数学教授费罗(Ferro,1465~1526)用代数方法求出了三次方程 $x^3+mx=n$ 的解,他的工作据说是以更早的阿拉伯资料为基础的.他并没有公开发表他的成果,而是把这个秘密透露给他的学生菲奥.

威尼斯数学教授泰塔格利亚(Niccolo Tartaglia,(1500~1557)也是一位以研究三次方程的解法而闻名的数学家.尽管他青少年时代非常贫困,但他通过自学,掌握了拉丁文、希腊文和数学.据说,他也曾慕名向费罗讨教过三次方程的解法,但遭到了拒绝,因

此,他发愤自己来攻克这一难题.经过不懈的努力,终于在1535年宣布掌握了一些三次方程的解法.然而费罗的学生菲奥认为此项声明纯属欺骗,因此,他向泰塔格利亚提出了挑战,要求来一次解三次方程的公开比赛.竞赛安排了两种类型的三次方程,菲奥只能解其中的一种,而泰塔格利亚却轻松地大获全胜.竞赛后,泰塔格利亚名望大增,并由此取得了韦罗纳的数学教席,但他并没有陶醉,而是乘胜前进,继续研究更一般的问题.1541年,他掌握了处理 $x^3 \pm px^2 = \pm q$ 和 $x^3 \pm px = \pm q$ 类型的方程的一般解法,但他却没有公开发表这一成果.

在这期间,当时最有天才的代数学家之一卡当(Cardano Girolamo,1501~1576)也用了相当多的时间研究这个问题,但没有成果.卡当是米兰的一个医生,精通数学,又嗜赌如命.据说有一次他与别人打赌,预言自己将于某时会死去.到了这一天,他为了赢得这场豪赌,居然以自杀的方式,结束了自己的一生.卡当找到泰塔格利亚,请求他教给自己解三次方程的方法,卡当在作出保守秘密的庄严信誓后,从泰塔格利亚那里得到了一份渴望已久的解法手稿.然而卡当并没有遵守自己的诺言,1545年,他在德国纽伦堡出版了一部关于代数学的拉丁文巨著《大法》,书中详细介绍了泰塔格利亚教给他的方法,这个方法可以简单地说明如下:

任意一个三次方程总可以通过减根变换,消去二次项化为形如 $x^3 + px = q$ 的形式,在这个简化了的方程中,令

$$x = \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n},$$

即

$$x^3 = m - 3m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} + 3m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{2}{3}} - n$$

$$= m - n - 3(mn)^{\frac{1}{3}}x,$$

于是方程变为

$$m - n - 3(mn)^{\frac{1}{3}}x = -px + q.$$

当 $m-n=q, 3(mn)^{\frac{1}{3}}=p$ 或 $mn=\frac{p^3}{27}$时,可以满足方程,故有

$$m^2-2mn+n^2=q^2,\ 4mn=\frac{4p^3}{27}.$$

两式相加即得 $$m^2+2mn+n^2=q^2+\frac{4p^3}{27},$$

由此得 $$m+n=\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}},$$

又因为 $m-n=q$,从而有

$$m=\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ n=\frac{q}{2}-\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

于是 $$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

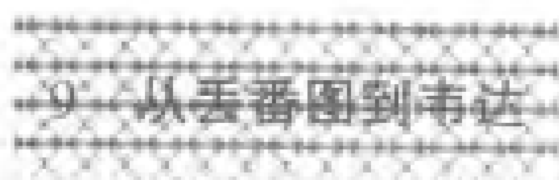
这一著作出版后,人们都称这一方法为卡当公式.泰塔格利亚对卡当的行为感到非常愤怒,他向法庭提出了控告.也许卡当毕竟理亏,不敢与泰塔格利亚对簿公堂,而派出他的学生斐拉里(Ludovico Ferrari,1522~1565)代他出庭.斐拉里能言善辩,在法庭上倒打一耙,指控泰塔格利亚剽窃了费罗的成果,平时说话口吃的泰塔格利亚在激烈的舌战中的处境是可想而知的,尽管他是受害者,但在这场官司中仍然败诉了.从道义上讲,卡当的行为是不道德的,但如果每一个科学家都像费罗、泰塔格利亚一样,将自己的成果秘不示人,那么,科学发展到今天会是什么样子就很难预料了.

在三次方程被解决后不久,一般四次方程的代数解法也被发现了.1540年,意大利数学家达科伊向卡当提出了一个可以导致四次方程求解的问题(把10分成三个数,使它们成连比,且前两败的乘积为6),这个问题最终由卡当的学生斐拉里解决.卡当在《大法》一书中也详细地介绍了这个被称为"斐拉里方法"的解法.

1572年,卡当死后不到几年,R. 邦别利出版了一本代数著作,对三次方程的解法作出了重大的贡献.我们都知道,如果$\frac{q^2}{4}+$

$\frac{p^3}{27}<0$,则方程 $x^3+px=q$ 有三个实根,但在这种情况下,利用前面所谓的"卡当公式",这些根都被表示成复虚数的两个三次根之差,这种情况在当时是很难理解的,故被称为"三次方程的不可约情况".邦别利指出:在不可约的情况下,存在明显的实根,从而为人们认识的提高扫清了障碍.

在文艺复兴时期,欧洲的数学工作者们冲破宗教势力的禁锢,发奋图强,使得数学这一古老的学科得以飞速发展,为后来欧洲成为世界数学的中心,并且常盛不衰打下了坚实的基础.




数学是思维的体操,同时,又是一种符号的游戏.历史的经验表明,采用合理的符号,能使数学学科得到迅速发展,相反地,没有一套合理的符号,其进展就会十分缓慢.众所周知,印度人发明的0,1,2,…,9这十个数码及其十进位值制记数法,由于简洁实用,受到阿拉伯人的青睐,并经阿拉伯人之手传入欧洲,进而成为当今科学世界的通用语言,对数学的迅速发展所起的作用是无法估量的.而在13~14世纪的欧洲,由于采用的是繁琐冗长的罗马记数法,以至于当时最杰出的数学工作者,也把当今小学生就已十分熟练的乘除运算看作是人世间最麻烦的事情.欧洲人至今仍用"掉到乘除里了"这样一句习语来形容某人陷入了困境,就是一个极为典型的例证.

用字母表示数,尽管在今天已是初中代数的一个最基本的内容,但在数学发展史上却是一件划时代的大事.它给数学思维插上了翅膀,使得原来在算术中许多需要极高技巧的算法变成了简单的机械性的操作,也为数学研究开拓了壮观的空间.因此,从某种意义上来说,用字母表示数标志着代数从算术脱胎而出,成为一门独立的学科.

事实上,代数学的研究历史可以说是与数学的历史一样的长.早在古巴比伦、埃及、印度和中国的早期数学知识中就积累了大量的代数内容.例如,在古埃及的数学纸草书中,就包含了许多关于解方程、数列求和等方面的内容.然而,这一时期以及后来的希腊

人的代数学,几乎毫无例外地都是用文字语言叙述的,其解决问题的方法,也基本上是算术的,它们繁琐的表现形式使学者难以更深入地展开研究.因此,建立新的语言,给其新的表现形式,是代数学发展的必由之路.

## 9.1 丢番图对符号代数的贡献

自觉地运用一套符号,以使代数的思路与表述更为紧凑、更加有效的人是丢番图.如前所述,丢番图是 3 世纪左右的希腊数学家,关于他的生平仅见于《希腊诗文集》所载的麦特罗多尔为他所撰的墓志铭:

“他生命的六分之一是幸福的童年.再活十二分之一,颊上长出了细细的胡须.又过了生命的七分之一才结婚.再过了五年,他感到很幸福,因为他有了一个儿子.可是这孩子光辉灿烂的生命只有他父亲的一半.儿子死后,老人在悲痛中只活了四年,便结束了尘世的生涯.”

这一谜语告诉我们,这位著名数学家是一位 84 岁的长者.

与古希腊其他的数学家相比较,丢番图对于数学的贡献主要是在代数方面.他的著作《算术》是人类关于代数的一部最早的巨著,在历史上与欧几里得的《几何原本》齐名.原书共 13 卷,现尚存 6 卷.这是一本问题集,丢番图最初的目的,可能是为了帮助学生学习这门课程而写的练习题,书中包含了 189 个问题,每个问题都有其独特的解法,共有 50 多种类型.在这本著作中,丢番图研究了许多种类型的方程,其中特别是对不定方程作了广泛而深入的研究.他善于把各类方程化为能解的形式,所用方法多得令人目不暇接.尤其是在处理形如 $Ax^2+C=y^2$ 或 $Bx+C=y^2$ 等类型的不定方程时,显示出惊人的巧思.但在解这类方程时,他始终未能提供一个一般的方法,难怪德国数学史家韩克尔说:“对于现代人来说,学习了丢番图的 100 个方程后仍然难以解出第 101 个方程…….

读者心绪不宁地急急忙忙从一个问题继续到另一个问题，就像在猜谜游戏一样，不能观其一点，触及其余."但不管怎么说，他工作深刻的程度远远超过他的同代人.因此，为了纪念他的工作，直到今天，这类方程仍被称为"丢番图方程".

大家知道，代数和算术的主要区别就在于代数引入未知量，根据问题的条件列出方程，然后解方程求出未知量的值.丢番图最杰出的功绩之一就是在代数中采用了未知数以及一整套符号.

在丢番图的著作中，将未知量称为"题中的数"，并用记号 $\delta$ 表示，相当于现在的 $x$. 未知量的平方记为 $\Delta^y$，$\Delta$ 是希腊字 ΔYNAMIΣ (dynamis，幂)的第一个字母.未知量的立方记为 $K^y$，$K$ 是希腊字 KYBOΣ (cubos，立方)的第一个字母.未知量的四次方，丢番图用带有指数 $y$ 的两个 $\Delta$ 来表示，即 $\Delta^y\Delta$，他称为"平方平方"；五次方用 $\Delta K^y$ 表示，称为"平方立方"；六次方用 $k^yk$ 表示，称为"立方立方"；依次类推.他还用一些符号表示分数，例如，他用 $s^x$ 表示$\frac{1}{x}$，减号是符号 ↑，并把所有的负项都写在正项之后，$L^a$ 表示等号.在他的符号系统中，没有加法、乘法和除法的运算记号，加法他是用并列来表示的，而乘法和除法则通过累加和累减去进行.丢番图总是只使用一个未知数，对于其他的未知数他就想方设法将它们用这个未知数表示出来.我们来看他的一个具体例子："求两个数，使得它们的积与这两个数中任一数的和均为一个立方数."用现代语言表述，他的解法是这样的：设所求二数中的一个为 $8x$，那么设另一个数为 $x^2-1$，则有 $8x(x^2-1)+8x=8x^3=(2x)^3$，满足题目的一个条件.另一方面，这两个数还应满足 $8x(x^2-1)+(x^2-1)$为立方数的条件，故可设

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)=(2x-1)^3,$$

解之得 $x=\frac{14}{13}$，所以所求的两个数分别为$8\times\frac{14}{13}=\frac{112}{13}$和$\left(\frac{14}{13}\right)^2-1$

$=\frac{17}{169}$.

量子力学的奠基人之一玻恩曾经说过:"符号是人与人之间传达信息的运载工具,因此对于人们掌握客观知识的可能性来说是有决定性的."在丢番图以前的希腊人和追随他们的阿拉伯人,在他们的著作中没有使用过任何符号,每一步运算全部都要用文字表述,使得数学问题的解法与一篇文学主题的论文没有多大区别.自丢番图引入这套符号后,为代数带入了重大变革,推动了代数学的迅速发展.正如美国数学史家 M. 克莱因所说:"代数上的进步是引用了较好的符号体系,这对它本身和分析的发展比 16 世纪技术上的进展远为重要.事实上,采取了这一步,才使代数有可能成为一门科学."

丢番图以后一直到 17 世纪,尽管许多数学家在引入代数符号方面作出了不少贡献,但总体上说,他们的符号基本上仍是标准文字的缩写,还只是丢番图工作的延续.

## 9.2 韦达的工作

在符号体系上使代数学发生最大变革的是法国数学家韦达(Francis Veita,1540~1603).韦达 1540 年出生于丰特内的一个贵族家庭,他的姓名叫佛兰西斯·韦埃特,韦达是他的拉丁文名字.他早年学习法律,并曾在巴黎裁判所担任过律师,后到布列塔尼地方议会工作.在一位侯爵的推荐下,1580 年,他成为亨利亲王的枢密顾问官,对数学始终不懈的浓厚兴趣,使得他把绝大部分闲暇贡献给了数学.

关于韦达的数学研究,有着许多有趣的轶事.据说,有一位比利时的大使曾向法国国王亨利夸口说,法国没有一位数学家能够解决他的同国人罗芒乌斯 1593 年提出的需要解四十五次方程的

问题. 亨利找来了韦达，让他来解这个问题. 韦达一眼就看出了这个方程所蕴含的三角关系，几分钟内就给出了两个根，后来又求出21个根，当然，他没有考虑方程的负根. 反过来，韦达也向罗芒乌斯提出了挑战，看谁能解古希腊的阿波罗尼斯所提出的"作一圆与三个给定圆相切"的问题. 韦达顺利地以欧几里得几何作工具求出了解，而罗芒乌斯却百思不得其解. 当罗芒乌斯得知韦达的天才解法后，十分敬佩，专程长途跋涉到丰特内拜访韦达，两人从此后便结下了深厚的友谊. 还有这样一个传说，在法国与西班牙的战争中，韦达成功地破译了西班牙人的军事密码，使得法国人对西班牙的军事行动了如指掌，因而掌握了战争的主动，赢得了胜利. 于是西班牙国王菲力普二世向教皇控告法国在战争中对西班牙施用了魔法，这是"与基督教信仰的惯例相违背的". 更为荒谬的是，西班牙宗教裁判所在韦达缺席的情况下，竟以背叛上帝的罪名判处韦达以焚烧致死的极刑，当然，韦达不会跑到西班牙去服刑的.

韦达一生写了许多关于三角学、代数学和几何学的著作，其中主要有:《三角学的数学基础》、《分析方法引论》、《几何补编》、《有效的数值解法》和《论方程的整理与修正》. 这些著作中所包含的杰出的数学成就表明，他是这个时期最伟大的数学家之一.

在《三角学的数学基础》一书中，韦达系统介绍了如何利用六种三角函数解平面和球面三角形，首次给出了正切定律、正弦差公式及钝角球面三角形的余弦定理等. 此外，还提出了正弦函数 $\sin\theta$ 与多倍角正弦函数 $\sin n\theta$ 的关系式

$$\sin n\theta = n\sin\theta - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3\theta + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta - \cdots.$$

前面所说的韦达在解决罗芒乌斯的四十五次方程时就是利用的这个公式.

在《几何补编》中，韦达利用欧几里得《几何原本》中提出的等比级数求和公式 $\frac{S_n - a_n}{S_n - a_1} = \frac{a_1}{a_2}$，富有创造性地第一个提出无穷等比

级数求和公式：当$\frac{a_1}{a_2}>1$，即$a_1>a_2$时，由于$a_n$在$n$趋向无穷时趋向于0，因而有$\frac{S_\infty}{S_\infty-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$，即$a_1(S_\infty-a_1)=a_2S_\infty$，故$S_\infty=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}$，令$a_2=a_1q$代入即得到$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$，这里$|q|<1$. 应当指出，韦达限于当时的数学水平，对等比级数是否收敛，即是否以常数为和是不理解的，这个问题到17世纪以后才逐渐得到解决.

在《有效的数值解法》一书中，韦达给出了一种求任意次幂代数方程近似根的方法，这是在意大利数学家们给出三、四次方程解法后在高次方程研究中的一个新的突破.

$\pi$值的计算，是一个永远迷人的课题. 韦达仿照阿基米德的方法，在1593年求出$\pi$的近似值为

$$3.1415926535<\pi<3.1415926536.$$

这在当时是最佳的近似值. 韦达还通过考察单位圆的内接正4，8，16，…，$2^n$边形，求出$\pi$值的解析式

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots=\prod_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

利用此式计算$\pi$值，可以避免复杂繁难的几何手续. 这是数学史上第一个计算$\pi$值的解析式.

韦达在符号代数方面的贡献最为突出. 当时数学研究的中心内容是探究各种代数方程的解法. 但随着研究的深入，各种特殊形式的代数方程也随之迅速增长，例如卡当《大法》一书中方程的种类就有66种之多，对每一种方程都需要一个特殊的解法，这无疑要耗去数学家们巨大的精力. 韦达设想寻找出一种求解各种类型代数方程的通用的方法，为此，他认真研究了泰塔格利亚、卡当、斯蒂文、邦别利和丢番图等人的著作，从这些名家特别是丢番图那里

获得了灵感,那就是要实现自己的设想,首先要使方程具有普遍的形式,而其中关键的一步就是使用字母来表示数,因此在他的名著《分析方法引论》一书中,他第一个有意识地、系统地使用了字母.

《分析方法引论》被公认是一部最早的符号代数的著作.在这部著作中,韦达不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂,而且还用来表示一般的系数.通常他用辅音字母来表示已知量,用元音字母表示未知量,用拉丁语表示各次方幂.例如,现在的 $A$,$A^2$,$A^3$,韦达记作 A,A quadratum,A cubum,有时还缩写简化为 A,AQ,AC.韦达使用了"+"与"-"分别表示加法与减法,但没有一个确定的符号来表示相乘,也没有一个确定的符号来表示相等,这些通常都用文字来说明.如恒等式

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,$$

他的写法是

$a$ cubus + $b$ in $a$ quadr. 3 + $a$ in b quad. 3 + $b$ cubo equalia $\overline{a+b}$ cubo,

在这里,韦达用统一的符号表示已知量、未知量及其运算,取代了以往惯用的词的缩写方法,在使得代数学形成国际通用的独立的语言方面发挥了巨大的作用.

韦达把他的符号化代数称为"类的算术"(logistica speciosa),以区别于"数的算术"(logistica numerosa),并明确指出:类的算术是施行于事物的类或形式的运算,而数的算术仅仅与具体的数字有关,从而,类的算术即代数成为研究一般类型的数学形式和方法的学问.

由于采用了先进的代数符号系统,很快地,韦达在当时代数研究的中心问题——方程论方面取得了杰出的成就.在《分析方法引论》中,他改进了意大利数学家泰塔格利亚、卡当和斐拉里等人关于三、四次方程的解法,利用变换消去方程的次高项,将二次、三次和四次方程的解都用一般表达式给出,这就是所谓的公式解.

在他的著作中，还给出了关于三次方程 $x^3+3ax=b$ 的独特解法，即令 $x=\frac{a-y^2}{y}$，则原方程化为 $y^6+2by^3=a^3$，即化为关于 $y^3$ 的二次方程，依照先求 $y^3$，然后求 $y$，再求 $x$ 的次序容易求出原方程的解，但在韦达的所有解法中都舍弃了负根.

韦达在《论方程的整理与修正》一书中还借助于三角恒等式

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$$

给出了满足一定条件的不可约三次方程 $x^3+px+q=0$ 的一个方法. 其方法是：在上式中令 $\cos A=y$，则有

$$y^3-\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}\cos 3A=0. \tag{1}$$

再令 $x=ny$，则原方程化为

$$y^3+\frac{p}{n^2}y+\frac{q}{n^3}=0. \tag{2}$$

对照(1)与(2)式，有

$$\frac{p}{n^2}=-\frac{3}{4},\frac{q}{n^3}=-\frac{1}{4}\cos 3A,$$

即
$$n=\sqrt{-\frac{4}{3}p},\cos 3A=-\frac{4q}{n^3},$$

故
$$\cos A=-\frac{q}{2}/\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

从而在 $p<0$，且 $\left|-\frac{q}{2}/\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|<1$ 时，可解得原方程的三个实根为

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos A,$$

$$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(A+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(A+\frac{4\pi}{3}\right).$$

韦达当时只解出一个实根，但他的解法是非常有意义的．一方面，可利用来求方程的近似根，具有一定的实用价值；另一方面开拓了利用函数来研究高次代数方程的新途径，具有重要的理论价值．

在这本书中，韦达提出了四个揭示整式方程的根与系数之间的关系的著名定理——“韦达定理”．不过应当指出，韦达仅就 $n=2,3$ 等几种特殊情况得出了结论，并没有给出 $n$ 次方程的韦达定理的一般证明．这一定理的证明，是在笛卡儿 1637 年得出因式定理、高斯 1797 年证明了代数基本定理以后才作出的．

韦达关于代数符号体系的伟大设想与实践，对于代数学的发展无疑是一座重要的里程碑，它使得代数学的面貌发生了根本的变化．然而，当时大多数数学家并没有马上体会到符号体系对代数发展的巨大作用，他们依旧我行我素．不过，随着迅速发展的科学技术对数学家们提出的问题日益复杂，使得人们不得不对韦达的工作刮目相看，他们为韦达精湛的思想所折服．许多人，如哈里奥特（1560～1621，英国人）、吉拉德（1596～1632，荷兰人）、奥特雷德（1574～1660，英国人）等沿着韦达所开辟的道路继续前进，他们在推广与引进代数符号、完善代数体系等方面都做出了许多杰出的贡献，特别是解析几何的创始人、近代著名的法国哲学家笛卡儿（1596～1650）对韦达使用字母的方法作了重要的改进，他用排在英文字母表前面的字母如 $a,b,c$ 等表示已知量，用表末的字母如 $x,y,z$ 等表示未知量，这在现在已成为习惯用法．由他提出和使用的许多符号同现今的写法基本是一致的．

综上所述，我们可以看出，正是由于韦达等人有意识地引入了代数符号，使得代数成为研究对象更为广泛的独立的数学分支，符号代数由此而生，韦达无愧于“符号代数之父”的称号．

# 10 数学的转折点

美国著名数学史家 M.克莱因曾指出:"只要代数同几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄.但是当这两门科学结合成伴侣时,它们就相互吸取新鲜的活力,从那以后,就以快速的步伐走向完善."事实也正是如此,解析几何的建立为数学乃至整个科学树起了一座耀眼夺目的丰碑,从根本上改变了数学的面貌,使数学从此跨入一个崭新的时代,即从常量数学进入变量数学的时代,从而大大地促进了数学的发展.

## 10.1 解析几何产生的背景

文艺复兴后的300年间,各种技术都在发展,新技术的发明比人类历史上曾经有过的总和还要多,其中包括一系列重大的发明.正是这些发明为数学和科学的突飞猛进扫清了障碍,激发了人们探索自然和了解数与形之间奥秘的热情.文艺复兴运动大大解放了人们的思想,在这场运动中,科学得到复兴,数学有了很大的发展,数学思想进入了一个新阶段.

首先,阿拉伯人的代数学的思想方法得到了发展,整个16世纪乃至17世纪的数学都表现出这种倾向:一是大多数国家都采用了印度—阿拉伯数码,由此使记数和算术运算得以简化,大大提高了人们的数学能力.这种简化使计算成为一种数学方法,它在数学中的应用产生了一系列的理论成果.同时,由于印度—阿拉伯数码的采用,人们在数学中引入了笔算法,这对数学的发展具有重要的

意义.二是系统地采用数学符号,使文艺复兴后的数学不同于古代数学,这一大进步,是现代数学思想方法的重要基础之一.三是这一时期的数学逐渐脱离了古希腊数学的逻辑基础,离开了严格的公理法,人们所关注的新东西属于现在所谓代数和分析这些数学门类,这就为解析几何的产生创造了条件.

其次,随着欧洲封建社会的解体和资本主义工场手工业向机器大生产的过渡,自然科学从神学的桎梏下解放出来,开始大踏步前进.这时,生产和自然科学等向数学提出一系列必须从运动变化和发展观点来研究事物的新问题.开普勒(Kepler,1571～1630)在总结大量观测资料的基础上,发现行星围绕太阳运动的轨迹是椭圆,提出了行星运动三大定律;伽利略(G. Galilei,1564～1642)明确提出,各种抛射物体的运动轨迹是抛物线,他们的工作引起了人们对圆锥曲线重新研究的兴趣.圆锥曲线早在古希腊时代就被阿波罗尼斯等人认真研究过,不过,在16世纪之前人们只是出于对纯数学的兴趣,而且是用静态的观点来研究图形的性质的,即把它们看作是用平面从不同角度截锥体而得到的曲线.行星绕日运动和抛体运动要求人们用运动和变化的观点研究圆锥曲线,即把曲线看成是物体经运动而生成且随时间而变化着的轨迹.

总之,在这一时期数学得到了越来越多的应用,同时,也有更多的问题需要应用数学去解决.科学的需要和对研究新的数学方法的兴趣推动了笛卡儿和费尔马对坐标几何的研究,在他们手里,代数学同几何学得到了有机的结合,从而开拓出一门崭新的数学领域——解析几何学.

## 10.2 费尔马的坐标法

费尔马(Fermat,1601～1665)出身于商人家庭,在大学时代学习法律,早年曾任图卢兹地区议会议员和律师,数学是他的业余爱好,他对数论、概率论和解析几何均作出了开创性的工作,也是微

积分的先驱之一，被人们称为“业余数学家之王”.

费尔马是从研究希腊数学的几何学家，特别是从阿波罗尼斯的工作开始他的解析几何研究的. 但他的出发点是想用代数作为工具来研究曲线. 他在《平面和立体轨迹引论》(写于1629～1636年，死后14年即1679年出版)的开头写道：“毫无疑问，古人对轨迹写得非常多……，他们对于轨迹的研究并不是那么容易的，原因只有一个，这就是由于他们对轨迹没有给予充分而又一般的表示的缘故.”这里所说的轨迹的一般表示，就是指用韦达的符号代数来表示的轨迹，即曲线.

费尔马的思考方法是：对于任意一条曲线 $C$，设 $J$ 是它上面的一般点(如图10－1)，那么 $J$ 的位置就可以用 $A$，$E$ 两字母定出：$A$ 是从点 $O$ 沿底线到点 $Z$ 的距离，$E$ 是从点 $Z$ 到点 $J$ 的距离. 于是，对不同位置的线段 $E$，其末端就确定不同的点 $J$. 当然，费尔马的这一方法是不太严格的. 他说：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线.”费尔马用韦达的办法，写出了联系 $A$ 和 $E$ 的各种方程，并指明它们所描绘的曲线. 根据这个原理他指出了如下方程(用今天之记号)的图形：

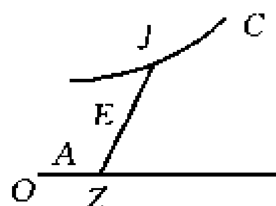


图10—1

| | |
|---|---|
| $ax=by$ | 表示一条直线 |
| $c(a-x)=by$ | 表示一条直线 |
| $b^2-x^2=y^2$ | 表示一个圆 |
| $a^2-x^2=k^2y^2$ | 表示一个椭圆 |
| $a^2+x^2=y^2$ 和 $xy=a$ | 各表示一条双曲线 |
| $x^2=ay$ | 表示一条抛物线 |

显然，在费尔马的“坐标系”中，只有横坐标轴，纵坐标轴没有

明白地给出来,两者也不一定垂直,并且不用负坐标,所以无法表示整个曲线.而且,对费尔马来说,方程中的两个未知量 A 和 E 不是两个数,而是两个线段,其中第一个线段处于水平方向,再在该线段的末端作第二个线段,那么第二个线段的末端就描绘出对应于给定方程的曲线.但是,费尔马的确领会到了通过这种方法可以建立代数方程同几何曲线之间的有机联系,这种方法后来被命名为坐标法.

## 10.3 笛卡儿的解析几何

笛卡儿(Descartes,1596—1650)是法国数学家、物理学家和哲学家,出生于法国的拉哈耶,其父是一名律师,曾任布列塔尼省地方议会的议员.笛卡儿在襁褓中丧母,甚得父亲宠爱,8 岁时进入当时欧洲最著名的拉弗莱希的一所耶稣公学学习,接受了传统的文化教育.他不拘泥于课本,喜欢博览群书,开阔了眼界和思路.1612 年从普瓦界大学毕业后,去巴黎当了一名律师.在巴黎,他结识了梅森(M.Mersenne)、迈多治(Mydorge)等人,一起研究数学.1617 年笛卡儿加入奥伦茨公爵的军队驻扎在荷兰,为解决一张公开张贴的荷兰语的数学问题而激发了对数学的兴趣.离开军队后曾到丹麦、荷兰、瑞士、意大利等地游历,并移居荷兰达 20 多年之久,在此期间,笛卡儿的科学和哲学思想逐渐成熟,先后发表了许多在科学和哲学史上产生重大影响的论著,创造了新的科学和方法,解析几何的创建就是这一时期众多成果中的一项.

笛卡儿在 1628 年出版的《指导哲理之原则》一书中已经提到"数、形同质"的思想,以及用代数方法研究几何问题的思想.1637 年,他出版了他的《更好地指导推理和寻求真理的方法论》,通常简称《方法论》,此书包括三个著名的附录:《几何》、《折光》和《陨星》,其中《几何》在整个著作中大约占 100 页,包括了他关于坐标几何和代数的思想.在这篇著作中,他首次明确地提出了点的坐标和变

数的思想,并借助坐标系用含有变数的代数方程来表示和研究曲线.这篇《几何》的问世,是解析几何产生的重要标志.

笛卡儿是作为一位哲学家、一位自然的研究者和关心科学用途的人来研究数学的.在科学发现一些向主要的宗教教条挑战的自然规律的时代,他开始怀疑他在学校里所得到的一切知识.笛卡儿说:"要想追求真理,我们必须在一生中尽可能地把所有事物都来怀疑一次."怀疑论促使笛卡儿寻找在一切领域中获得真理的普遍方法,因此,笛卡儿十分重视方法论的研究,并把它作为他的一切工作的首要任务.他认为在一切领域中获得真理的方法就是数学方法,因为数学中立足于公理的证明是无懈可击的,而且是任何权威所不能左右的,数学提供了获得必然结果以及有效地证明其结果的方法.此外,笛卡儿还清楚地看到,数学方法超出他的想象之外,他说:"它是一个知识工具,比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力,因而它是所有其他知识工具的源泉."

在他的数学方法的研究中,他抽出了在任何领域中获得正确知识的一些原则:

"第一条是:决不把任何我没有明确地认识其为真的东西当作真的加以接受,也就是说,小心避免仓猝的判断和偏见,只把那些十分清楚明白地呈现在我的心智之前,使我根本无法怀疑的东西放在我的判断之中.

"第二条是:把我所考察的每一个难题都尽可能地分成细小的部分,直到可以适于加以圆满解决的程度为止.

"第三条是:按照次序引导我的思想,以便从最简单、最容易认识的对象开始,一点一点逐步上升到对复杂的对象的认识,即便是那些彼此之间并没有自然的先后次序的对象,我也给它们设定一个次序.

最后一条是:把一切情形尽量完全地列举出来,尽量普遍地加以审视,使我确信毫无遗漏."

正是笛卡儿对数学方法的深入研究,使他断定数学可以有效地应用到其他科学上去. 他分析了古代已有的几何学和当时已经定型的代数学的优缺点,批评希腊几何过于抽象,并且过多地依靠图形,而代数则使人受到某些规则和公式的约束. 他提出"寻求另外一种包含这两门科学的好处而没有它们的缺点的方法". 当他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力,便着手把代数用到几何上去.

在《几何》一书中,他开始仿照韦达的方式,用代数来解决几何作图的问题,比希腊人有了明显进展. 对于希腊人来说,一个变量相当于某线段的长度,两个变量的乘积相当于某个矩形的面积,三个变量的乘积相当于某长方体的体积,三个以上变量的乘积,希腊人就没法处理了. 笛卡儿不这么考虑,他认为:与其把 $x^2$ 看作面积,不如把它看作比例式 $1:x=x:x^2$ 的第四比例项,从而只要 $x$ 是已知的,$x^2$ 就可以用适当长度的线段来表示,这样,只要给定一个单位线段,就能用线段的长度表达一个变量的任何次幂或任意多个变量的乘积,而当变量的值被指定时,我们就能用欧几里得工具作出那么长的线段来. 在《几何》的第一部分中,笛卡儿把几何算术化了:在一给定的直线上标出 $x$,在与该轴成固定角的线上标出 $y$,并且,作出其 $x$ 的值和 $y$ 的值满足给定关系的点. 例如,由关系式 $y=x^2$,对于 $x$ 的每一个值,我们就能作出对应的 $y$——上述比例式中的第四项. 笛卡儿最感兴趣的是:对按运动学定义的曲线求出这样的关系式. 作为其方法的一个应用,他讨论了帕普士问题:如果 $p_1,\cdots,p_m,p_{m+1},\cdots,p_{m+n}$ 是从点 $P$ 向 $m+n$ 条给定直线所引的,与这些直线形成一些给定角的 $m+n$ 条线段的长度,且 $p_1p_2\cdots p_m=kp_{m+1}p_{m+2}\cdots p_{m+n}$(这里 $k$ 是常数),试求点 $P$ 的轨迹. 古希腊人对于 $m$ 和 $n$ 不超过 2 的一些情况,讨论过这一问题,但是,没有解决一般问题. 笛卡儿证明了:对于 $m$ 或 $n$ 超过 2 的情况,这问题导致次数高于 2 的轨迹,并且在某些情况下,他确实能

用欧氏工具作出该轨迹的点.

在第二部分中,笛卡儿处理了 $m+n=4$ 时的帕普士问题.设给定的线段是 $AG, GH, EF$ 和 $AD$,考虑一点 $P$,从点 $P$ 引四线各与一条已知线交于已知角(四个角不一定相同),把所得的四条线段记为 $PQ, PR, PS, PT$,要求找出满足条件 $PQ \cdot PS = PR \cdot PT$ 的点 $P$ 的轨迹.

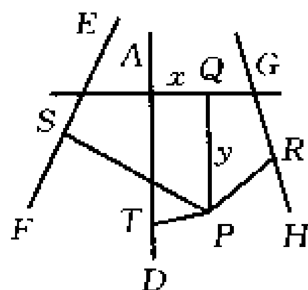


图 10—2

笛卡儿记 $AQ$ 为 $x$,$QP$ 为 $y$,经过简单的几何考虑,他从已知量得出 $PS, PR$ 和 $PT$ 的值,把这三个值分别代入

$$PQ \cdot PS = PR \cdot PT,$$

他就得到一个 $x$ 和 $y$ 的二次方程

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2.$$

其中 $A, B, C, D$ 是已知量组成的简单的代数式.于是他指出,如果任意给 $x$ 一个值,就得到一个 $y$ 的二次方程;从这个方程解出 $y$,从而就能用直尺和圆规把 $y$ 作出.若取无限个 $x$ 值,就得到无限个 $y$ 值,从而得到无限个点 $P$,所有这些点 $P$ 形成的图形,就是方程

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2$$

所代表的曲线(轨迹).

这里,笛卡儿发展了代数方法,他选定一条线作为基线(如图 10—2 中的 $AG$),以 $A$ 为原点,$x$ 值是基线上的长度,从 $A$ 量起;$y$ 值是一个线段的长度,由基线出发,与基线作成一个固定的角度.实际上,他建立的是一个斜坐标系.由此,他把几何曲线变成代数方程,然后通过研究代数方程来揭示曲线的性质.笛卡儿用这种新思想解决帕普士问题,从而得到了曲线的方程.他断言,曲线的次数与坐标轴的选择无关,并指出这个轴要选得使最后得出的方

程愈简单愈好,同时,他又考虑两个不同的曲线,在同一坐标系中所对应的方程,并且通过联立这两个方程来求出这两条曲线交点的坐标.

有了曲线方程的思想后,笛卡儿在推广曲线的概念方面又迈出了一大步.他不但接纳了以前被排斥的曲线,而且指出给定任何一个含 $x$ 和 $y$ 的代数方程,都可以求出它的曲线,从而得到一些全新的曲线,他还把几何曲线按其对应方程的次数加以分类.

笛卡儿和费尔马工作的共同之处是都没有负坐标,也没有 $y$ 轴,他们的"坐标系"都是斜坐标系,但是,两人研究坐标几何的方法大不相同.笛卡儿批评了希腊的传统,而且主张同这些传统决裂;费尔马则着眼于继承希腊人的思想,认为他自己的工作是重新表达了阿波罗尼斯的工作.真正的发现——代数方法的威力——是属于笛卡儿的,他知道他在改造古代的方法.他在《几何》的引言中说:"我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论,以及考查这些性质的方法,依我看,远远超出了普通几何的论述,正如西塞罗(Cicero)的词令远远超过儿童的简单语言一样."笛卡儿的方法具有普适性,而且就潜力而论也适用于超越曲线.

## 10.4 解析几何的完善和发展

令人遗憾的是,笛卡儿和费尔马的解析几何思想并没有立即得到数学家的普遍接受和使用,这主要有以下的原因:首先,费尔马的《引论》出版较晚,而笛卡儿的《几何》因强调几何作图问题,所以掩盖了用代数方程表示几何曲线,并通过代数方程研究几何曲线这一珍贵思想.笛卡儿写这部著作时又有意地用含糊的笔法,致使读起来十分困难;其次,当时许多数学家反对把代数和几何混淆起来,或者把算术和几何混淆起来,所有这些原因,虽然阻碍了对笛卡儿和费尔马的解析几何思想的了解,但也有很多人逐渐采用并且扩展了坐标几何.

范·斯柯登(Van Schooton)将笛卡儿的《几何》译成易于阅读的拉丁文，并为译文写了一篇介绍性的评论，于 1649 年出版，并再版了若干次．范·斯柯登这一工作对宣传、改进解析几何起了积极作用．约翰·瓦里士(John Wallis)在《论圆锥曲线》一书中有意识地引进负的纵、横坐标，从而使笛卡儿坐标几何中所考虑的曲线扩大到整个平面，他很可能是第一个用方程来推导圆锥曲线性质的人，他的书大大有助于坐标几何思想的传播．

笛卡儿和费尔马的坐标几何中只给出了横轴，纵轴没有明白地给出，这种方法一直沿用到 18 世纪．第一次正式使用 y(纵)轴的是瑞士人克拉梅所著的《代数曲线的解析引论》(1750 年)，"纵坐标"一词是莱布尼兹曾于 1694 年偶尔使用，"横坐标"一词则出现于 18 世纪上叶沃尔夫等人的著作中．

牛顿的《流数法与无穷级数》(约 1671 年写成，1736 年出版)包括了坐标几何的许多应用，并且创造性地引进新的坐标系，他用一个固定点和通过此点的一条直线作标准，和我们现在的极坐标系相似，书中还包括了其他与极坐标有关的思想．1691 年，瑞士的雅各·贝努利在《教师学报》上发表了一篇基本上是关于极坐标的文章，可以说，雅各·贝努利引入了极坐标系，是极坐标的发明者．1729 年，德国的赫尔曼(Jacob Hermann)不仅正式宣布了极坐标的普遍可用，而且自由地应用极坐标去研究曲线，并建立了直角坐标系和极坐标系的互换公式．欧拉扩充了极坐标的使用范围并且明确地使用三角函数的记号．

把解析几何推广到三维空间是其发展的重要一步．笛卡儿和费尔马都曾有三维解析几何的思想，笛卡儿在《几何》第二卷中指出，他的想法可以运用到所有这样的曲线，即可以看作是一个点在三维空间中作规则运动时所产生的曲线，并进一步指出，一个含有三个未知数(这三个未知数定出轨迹上的一点 $C$)的方程所代表的 $C$ 的轨迹是一个平面、一个球面、或一个更复杂的曲面．费尔马在

1643 年的一封信里,简短地描述了他关于三维解析几何的思想,在一篇只有半页长的文章里,他说,含有三个未知数的方程表示一个曲面,然而,笛卡儿和费尔马都没有进一步去考虑这种推广.1715 年,约翰·贝努利首次引入空间直角坐标系,1731 年,克雷略又得出空间曲线可用两个空间曲面表示.欧拉在早期对曲面方程的一些研究工作的基础上,在他的《引论》(1748 年)第二卷第五章的附录中,系统地介绍了许多早已做过的工作,并研究了一般的三个变量的二次方程:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz=l.$$

拉格朗日在一篇关于球体引力的论文中,给出了轴的旋转的对称形式的变换,即齐次线性正交变换.在 1802 年 Gaspard Merge 和他的学生 Jean Nuolas Pierre Hachette 一起写的一篇论文《代数在几何中的应用》中,证明了二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线,还证明了平行截面截得的是相似的二次曲线.由于上述数学家们的努力工作,解析几何变成了一个独立的而且充满活力的数学分支.

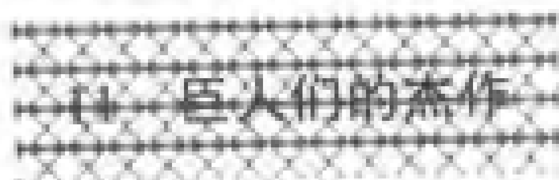
## 10.5 解析几何产生的意义

解析几何的产生在数学史上具有划时代的意义.恩格斯指出:"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了."可以说 17 世纪以后的各种数学发展都在某种程度上和变量有关.有了解析几何,几何概念可用代数表示,几何的目标,可通过代数达到;反过来,给代数语言以几何的解释,可以直观地掌握那些语言的意义,又可以从中得到启发去提出新的结论.

解析几何把一切量如 $x,x^2,x^3,\sqrt[n]{x}$ 等以及它们的代数运算的结果都看作线段,这就克服了古希腊人把 $x,x^2,x^3$ 等分别看成线段、面积和体积的局限性,使量的概念更加抽象.

解析几何的产生给科学提供了迫切需要的数学设备——数量的工具.研究物理世界首先需要几何,物体基本上是几何的形象,物体运动的路线是曲线,测地学、航海学、天文预测、抛射体的运动等,都需要数量知识,解析几何使人把形象和路线表示为代数形式,从而可以得到较满意的结果.

解析几何的产生为数学思想的发展开辟了新的天地.首先,随着解析几何自身的产生和发展,"曲线"概念得到了进一步深化.古希腊人只限于能用一些简单工具(直尺、圆规及少数其他机械)作出来的图形,而解析几何则把"曲线"概括为任意的几何图形,只要它们对应的代数方程是由变量 $x$, $y$ 的有限次代数运算所构成的,由此,开辟了用代数方法研究几何问题的新思路.其次,笛卡儿和费尔马发明的解析几何,把二维平面上的点和有序实数对 $(x, y)$ 之间对应起来,按同样的思想,可以把三维平面上的点和有序实数组 $(x, y, z)$ 之间建立对应关系,那么,代数中的四元有序数组也可以与此类比,构成一个四维空间,依次类推,提出了高维空间的理论,这是现代数学极其重要的思想.19 世纪以后,经典解析几何已经发展得相当完备,但解析几何依然充满活力.事实上,现代数学中的两个很有生命力的分支——泛函分析和代数几何,在很大程度上都是解析几何的直接延续.



# 11 巨人们的杰作

微积分学,或称数学分析,产生于17世纪后半叶,是人类思维的伟大成果之一.它是从生产技术和理论科学的需要中产生的,它的出现是整个人类历史中的一件大事.

17世纪以前,人类关于数学的知识基本上还停留在初等数学的水平上,即常量数学的阶段.从17世纪中叶到18世纪末,欧洲工业革命的兴起,广泛地采用了机器,为了设计和制造机器,就需要掌握机械运动的规律;水运的改进要求了解物体在液体中的运动规律;船只稳定性的研究促进了质点力学的发展;适应对外扩张和争霸的需要,战争中广泛使用枪炮,这就要研究抛射体的运动.所有这些生产和技术中出现的问题迫切要求力学、天文学等基础学科的发展,但这些学科是离不开数学的,因而也就推动了数学的发展.

微积分并不是凭空产生的,它是经过相当长时间的酝酿,最后经牛顿、莱布尼兹的手才完成的.恩格斯说:"它们(微积分)是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的,但不是由他们发明的."可以说,微积分的产生与科学地继承和发展数学上长期积累的研究成果是分不开的.

## 11.1 古老的思想

事实上,"无限细分,无限求和"的微积分思想,在古代的西方和中国早就已经开始萌芽.

两千多年以前的古希腊时代，地中海沿岸的奴隶们在繁重的生产劳动中，早就认识到搬运重东西时利用滚动要比滑动省力，因而在运输中广泛应用装有圆轮和圆轴的车子；那时也已经出现水轮机，利用流水的冲力推动水轮转动，水轮又经过齿轮的作用带动碾磨，为了精密地制造这些工件，就需要对圆形有精确的认识，在深入地研究圆形的过程中，出现了“无限细分、无限求和”的微积分思想的萌芽.

古希腊科学家阿基米德在解决许多实际问题的同时，研究了圆的周长和面积的计算问题，他利用圆的内接正多边形和外切正多边形来推算，边数越多，圆和多边形就越接近. 从圆心到多边形顶点的半径把多边形分成一个个三角形，也同时把圆分成一个个扇形，多边形的边数越多，一个个三角形就越接近扇形，三角形的底边(即多边形的一条边)便近似于扇形的圆弧；三角形的面积便近似于扇形的面积；各个三角形底边之和便近似于圆的周长；各个三角形面积之和就近似于圆的面积，而且随着边数的增多，这种近似就变得越来越精确. 阿基米德从最简单的六边形一直做到 96 边形，得出圆周长和圆的直径的比值(圆周率 $\pi$)是 $3\frac{10}{71}$ 与 $3\frac{1}{7}$ 之间的数. 在这个计算工作中，已包含了“无限细分，无限求和”的微积分思想，多边形不断增多边数，这就是对于圆周“无限细分”，由许多三角形的总和来求圆周长及圆面积，这就是“无限求和”.

我国古代，也早就有了微积分思想的萌芽. 西汉刘歆在《西京杂记》中提到的“记里车”，东汉张衡制造的“浑天仪”，蜀汉诸葛亮使用并改进的“木牛流马”，都要设计制造圆形的物件，从而产生了魏晋时刘徽提出的“割圆术”. 他从圆内接正六边形做起，令边数成倍地增加，逐步推求圆内接正 12 边形、正 24 边形……，直到正 3072 边形，用这个正 3072 边形面积来逼近圆面积，就得到 $\pi$ 的较精确的值 3.1416，“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可

割,则与圆周合体而无所失矣."这就包含着微积分中"无限细分,无限求和"的思想方法.又如隋代建造的赵州桥,这座跨度达37米的大石拱桥,系用一条条长方形条石砌成,一段段直的条石却砌成了一整条弧形曲线的拱圈,这就是微积分中周部可以"以直代曲"的基本思想的生动原形.那么,为什么当时没有能够形成完整的微积分理论呢?这同样也是由于当时生产实践水平所决定的,不论是阿基米德所处的古希腊时代,或者是刘徽所处的魏晋时期,当时的生产工具都比较简单,机械运动还比较缓慢,反映在力学方面,基本上限于研究力的平衡等一类静力学问题;反映在几何学方面,也只是对简单的曲线和圆形(例如土地和器物容积)的计算.生产实践还没有提出进一步发展微积分思想的需要,因而数学还处在初等数学的阶段.这也说明,一种划时代的数学思想的产生是生产实践提出需要的结果,它的进一步形成和完善,也只有当生产实践有了进一步需要的时候才能实现.

到了16世纪前后,社会生产实践活动进入了一个新的时期.开普勒根据长期的天文观测资料,总结出行星运动的三大定律;伽利略(1564～1642)发现了自由落体的运动规律,这个规律可表成著名的公式:$S=\frac{1}{2}gt^2$;笛卡儿关于几何学的工作及费尔马对极值问题的研究,特别是他们关于解析几何的工作,开始有了变数概念,并把描述运动的函数关系和几何中曲线问题的研究统一起来了.1637年,笛卡儿发表《几何学》一书,把几何和代数统一起来,创建了解析几何理论,开始用运动的观点研究几何轨迹,即将变数引进数学,点的运动就表现为两个位置变数 $x$ 和 $y$ 的依存关系,当 $x$(表示动点的横坐标)变化时 $y$(表示动点的纵坐标)也随之变化,从而描绘出点的运动状况.一个变数 $y$ 对另一个变数 $x$ 的依存关系,即函数关系,表示它们之间的变化规律,正如恩格斯所说,"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学;有

了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了,而它们也就立刻产生."

## 11.2 两个问题

为了对微积分所研究的问题和方法先有一个大致的了解,下面对两个初等数学难以解决的问题作一些初步分析.

**问题1** 求自由落体在下落后1秒钟这个时刻的瞬时速度?

这是求一个作变速运动的物体在某一时刻的瞬时速度问题.根据物理实验总结出自由落体的运动规律为 $S=\frac{1}{2}gt^2$,其中 $S$ 是下落的路程(m),$g$ 是重力加速度($9.8\text{m/s}^2$),$t$ 是下落的时间(s).这一公式给出了自由落体下落的路程与时间的关系.对于匀速运动,速度=路程/时间,现在自由落体运动是变速运动,上述公式不再适用.

我们知道,当 $t=1$(s)时,$S=\frac{1}{2}g\times 1^2=4.9$(m), 当 $t=t_1$(设 $t_1>1$)时,$S=\frac{1}{2}gt_1^2=4.9t_1^2$(m).虽然现在无法用上述求速度的公式来求 $t=1$s 时的速度,但可以用它求得在 $t=1$ 到 $t=t_1$ 这段时间内的平均速度,

$$\bar{v}=\frac{4.9t_1^2-4.9}{t_1-1}=\frac{4.9(t_1+1)(t_1-1)}{t_1-1}=4.9(t_1+1),$$

这个值是随着 $t_1$ 的变化而变化的.因为速度是逐渐地变化的,在很短的时间内,速度的变化很小,因此只要我们把 $t_1$ 取得很接近于1,那就可以把求得的 $\bar{v}$ 作为 $t=1$ 秒时速度 $v$ 的近似值,而且 $t_1$ 愈是接近于1,$\bar{v}$ 就愈接近于 $v$,例如若取 $t_1=1.1$(s),则 $v=4.9(1.1+1)=10.29$(m/s).若取 $t_1=1.01$(s),则 $\bar{v}=4.9(1.01+1)=9.849$(m/s).因为1.01比1.1更接近于1,所以用 $t_1=1.01$ 算得的 $\bar{v}$ 比用 $t_1=1.1$ 算得的 $\bar{v}$ 更接近于 $v$,但是不管 $t_1$ 多么接近

于1,作为平均速度的 $\bar{v}$,毕竟是 $v$ 的近似值,而不是 $v$ 的精确值.那么如何把近似转化为精确呢?我们必须用运动的观点去考察当 $t_1$ 无限地接近于1时 $\bar{v}$ 变化的情况,才能最后确定 $v$ 的精确值.

**问题2** 求一个曲边三角形的面积.

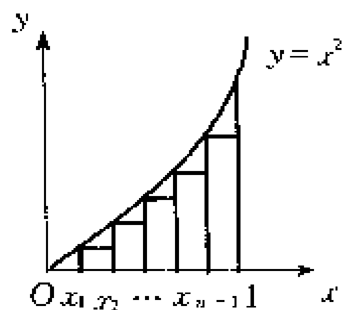



图 11—1

在初等数学中,我们已学过三角形、矩形、梯形等面积的计算,但如何计算曲边三角形的面积呢?古代的"割圆术"和古代劳动人民用一块块石头砌成拱形的桥洞给了我们启示,从整体看是曲的东西,在局部却可以"以直代曲".

我们把曲边三角形的底边 $OC$ 分成 $n$ 等份,每一份的长度为 $\frac{1}{n}$,分点的坐标为 $x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n}, \cdots, x_{n-1}=\frac{n-1}{n}, x_n=1$.再过这些分点引平行于 $y$ 轴的直线,那么曲边三角形就分成了 $n$ 个狭窄的曲边梯形(即有一腰是曲线的梯形).对于每个窄的曲边梯形,我们看到曲边上的点到 $x$ 轴的距离是不均匀地变化的,但是只要 $n$ 取得相当大,高度的变化就很小,就可以用矩形的面积近似地代替曲边梯形的面积.这些矩形的而积分别为

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2, \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2, \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2, \cdots, \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

把它们加起来就得到台阶形的面积

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]. \end{aligned}$$

即曲边三角形的面积 $A$ 的近似值,从图 11-1 可直观地看出,$n$ 愈大,$A_n$ 就愈接近于 $A$.但不管 $n$ 多么大,作为台阶形面积的 $A_n$ 毕竟是 $A$ 的近似值,而不是 $A$ 的精确值.为了把近似转化为精确,我们就要考察 $n$ 无限变大的过程中 $A_n$ 变化的情况,才能确定 $A$

的值.

上面提出的两个问题在形式上虽然很不相同,但解决这些问题的基本思想却是一样的,前者属于微分学问题,后者属于积分学问题. 用微积分解决问题的基本思想是先在局部“以不变代变”或“以直代曲”,求得所求量的近似值,然后在无限变化的过程中实现近似转化为精确.

## 11.3 先驱们的探索

在牛顿和莱布尼兹之前,微积分问题至少被17世纪几十个数学家探索过,他们主要研究以下四个方面的问题.

第一类是已知物体移动的距离表示为时间的函数,求物体在任意时刻的速度和加速度;反之,已知物体的加速度表示为时间的函数,求速度和距离. 不久人们就发现,这一问题是计算一个变量对另一个变量的变化率问题以及它的逆问题的特例.

第二类是求曲线的切线. 在进行光学的研究中涉及曲线的切线,另一个涉及曲线的切线问题出现在运动的研究中,运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向,就是轨迹的切线方向. 17世纪的著名数学家笛卡儿、费尔马、罗伯瓦(Roberval,1602? ~1675)等人都曾卷入作为微分学中心问题的切线问题的论战中. 笛卡儿和费尔马认为切线是当两个交点重合时的割线,而罗伯瓦则认为切线可看作是曲线在一点的方向. 罗伯瓦的观点至今在力学中仍有实际意义,费尔马的看法和现在的切线定义稍有出入,我们知道,切线是割线的极限,它本身并不是割线.

英国著名数学家巴罗(Isaac Barrow,1630~1677)也给出了求曲线切线的方法,他是剑桥大学的教授,精通希腊文和阿拉伯文,是牛顿的老师,也是最早赏识牛顿才能的人. 他的主要著作《几何讲义》是对微积分的一个巨大贡献,其中他应用了几何法,这种几何法相当复杂,而且用了辅助曲线,但有一个思想相当重要,就是

引入"微分三角形".巴罗的符号 $a:e$ 相当于现在的$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,巴罗的方法和现在微积分的差异仅仅在于符号的不同,因此,有些学者甚至断言巴罗是微分学的真正发明人.此外,巴罗还求得相当于$\int_0^\theta \mathrm{tg}\theta \mathrm{d}\theta = -\ln \sec\theta$一类的积分式.

第三类是求函数的最大值与最小值,例如抛射体获得最大射程时的发射角,行星离开太阳的最远和最近距离等问题,这方面的工作是由开普勒的观测开始的,他对酒桶的形状感兴趣,在他的《测量酒桶体积的新科学》一书中,证明了所有内接于球面的正平行六面体中,正方体的容积最大.费尔马在他的《求最大值和最小值的方法》一书中,也给出了他的研究方法,并对他的方法进行了讨论.

第四类是求曲线的长,例如,行星在一定时间内移动的距离,以及求曲线围成的面积,曲面围成的体积,物体的重心,一个体积相当大的物体(例如行星)作用于另一物体上的引力等.直到1650年还无人相信一曲线的长度能完全等于某直线的长度,当时计算椭圆的长度难住了数学家们.

牛顿、莱布尼兹之前,还有许多学者在微积分方面做了一系列的工作.如意大利的著名数学家卡瓦列利,他是伽利略的学生,是最早认识对数价值的人之一.他的最大贡献是"不可分量原理",他还求得相当于曲线 $y=x^n$ 下的面积,解决了很多现在用更严密的积分法解决的问题.还有英国的瓦里士,他也是最富独创性的数学家之一,他的著作《圆锥曲线论》,第一次摆脱了过去视圆锥曲线为圆锥面截线的看法,定义圆锥曲线为二次曲线.他在另一本著名的著作《无穷小算术》中,大大扩展了卡瓦列利的不可分量原理.

在这里顺便提一下,牛顿建立任意有理指数的二项式定理,是在寻求曲线 $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$下面积所引起的,这是1676年10月24

日牛顿给莱布尼兹的信中提到的. 实际上求 $y=(1-x^2)^0, y=(1-x^2)^1, y=(1-x^2)^2, y=(1-x^2)^3$ 等曲线下的面积,是瓦里士已经完成的工作,瓦里士完成了相当于

$$\int_0^x (1-x^2)^n \mathrm{d}x$$

的积分,可惜没有进一步把 $n$ 推广到分数. 牛顿研究 $n=\frac{1}{2}$ 的情形,导致二项式定理的发现.

以上我们讨论了牛顿和莱布尼兹的前驱者们在推动微积分工作方面所作的主要贡献. 事实上,在牛顿和莱布尼兹作出他们的冲刺之前,微积分的大量知识已经积累起来了.

## 11.4 科学的巨人——牛顿

牛顿(Isaac Newton, 1642 ~ 1727)出生于英格兰,幼时家境十分困难,但他刻苦好学,于 1661 年考入英国首屈一指的剑桥大学三一学院. 在数学方面,他幸运地得到巴罗教授的指导,从此在校好学不倦,逐步掌握了笛卡儿《几何学》、开普勒的光学和巴罗老师的《几何讲义》,他特别爱好瓦里士的《无穷小算术》. 牛顿的数学和光学的研究得力于他的老师巴罗的地方很多,巴罗的"微分三角形"的深刻思想给牛顿以极大的影响. 牛顿又经过几年刻苦的努力,他的学识达到了一个新的水平,他协助巴罗编写讲义,撰写微积分和光学的论文,得到巴罗的高度评价.

1669 年,巴罗坦然宣称牛顿的学识已经超过自己,当年 10 月将"路卡斯教授"的职位让给牛顿,一时传为佳话,牛顿当时仅 27 岁. 现在三一学院牛顿雕像之北,立有巴罗的雕像,为后人所敬仰.

1665 年 5 月 20 日,牛顿的手稿中开始有"流数术"的记载. 微积分的创始,不妨以这一天为标志. 所谓流数就是速度. 在变速运动中速度是路程对时间的微商. 至于速度的变化状况就要用速度的微商来反映,即加速度是速度的微商.

牛顿的流数术,除了他的少数朋友之外,长久没有人知道,一直到 1687 年才用几何的形式摘记在他的巨著《自然哲学之数学原理》中.这本书是在牛顿的朋友哈雷的鼓励和敦促下出版的,这是他一生主要工作的总结,也是科学史上的一件大事.

牛顿正式的流数术著作《流数术方法和无穷级数》在 1736 年才出版,在这本书中,牛顿引进了他独特的记法和概念.牛顿称变化率为流数,在字母上面加一点,叫做"记标字母"来表示.他称变化的量为流量,这样一来,假定 $x$ 和 $y$ 为流量,则它们的流数是 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$.在这本书中,牛顿清楚地陈述了流数术所提出的中心问题是:

(1) 已知连续运动的路径,求给定时刻的速度(即微分法);

(2) 已知运动的速度,求给定时间内经过的路程(即积分法).

牛顿在《曲线求积论》中(写于 1676 年,但直到 1704 年才发表),采用了面积的无限小矩形或"瞬"的思想,找到了曲线求积法:若曲线是 $y = ax^{\frac{m}{n}}$,则面积是 $S = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$;反之,若面积由 $S = \frac{n}{n+m}ax^{\frac{m+n}{n}}$ 给出,则曲线为 $y = ax^{\frac{m}{n}}$.牛顿把这个方法应用到大量的曲线如 $y = x^2 + x^{\frac{2}{3}}$ 和 $y = \frac{a^2}{bx}$ 的求积上.

## 11.5 莱布尼兹的工作

莱布尼兹(Gottfrid Wilhelm Leibniz,1646 ~ 1716)出生于德国莱比锡,是微积分的另一个奠基者,他的学识包括哲学、历史、生物学、机械、物理、数学、神学等等.莱布尼兹于 1661 年(15 岁)考入莱比锡大学学习法律,同时努力学好各门功课.那时德国大学水平是很低的,欧几里德几何学的教师讲解含糊不清,除了莱布尼兹外,便没有人能听懂.高等数学是完全没有的.1666 年莱布尼兹发表了一篇关于数理逻辑的论文,虽然是极不成熟的作品,但已显示

出他的数学才能.

1672 年,他在巴黎见到了惠更斯,在惠更斯的鼓励下,开始深入研究数学.在 1673 年访问伦敦时,他会见了许多数学家,学到了不少关于无穷级数的知识,获得了一本巴罗的《几何讲义》,还知道了牛顿的一些工作.在他回巴黎后的同一年,他研究了卡瓦列利、伽利略、帕斯卡、笛卡儿等人的数学著作.他在求积问题的研究中的第一批成果之一是求出一个单位圆的面积是无穷级数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots$ 的四倍,即 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots$.在他以后的研究中,主要致力于切线问题以及求积问题,并根据巴罗的"微分三角形",终于在 1684 年(牛顿《原理》出版前 3 年)发表了他的第一篇微分学论文,是世界上最早的微积分文献,这篇论文带有一个很长而古怪的标题:"一种求极大极小和切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算."这篇仅 6 页纸、内容并不丰富、说理也颇含混的文章,却具有划时代的意义.它已含有现代的微分符号和基本微分法则:

$$\mathrm{d}ax = a\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(z-y+w+x)=\mathrm{d}z-\mathrm{d}y+\mathrm{d}w+\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u.$$

导数记作 $\mathrm{d}x:\mathrm{d}y$,在 1675 年的手稿中记作 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$,1676 年记作 $\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}x}$,后来在 1693 年的另一篇论文中用 $\mathrm{dd}x:\mathrm{d}y^2$ 表示 2 阶导数.1684 年的论文还给出极值的条件是 $\mathrm{d}y=0$,拐点的条件是 $\mathrm{d}^2y=0$.

莱布尼兹断定一个事实:作为求和过程的积分是微分的逆.这种想法已出现在巴罗和牛顿的著作中,他们用反微分求得面积,但莱布尼兹是第一次表达出求和与微分之间的关系.这一关系的现

代表述就是众所周知的牛顿—莱布尼兹公式:

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续,且当 $x \in [a,b]$ 时,$F'(x) = f(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

但在当时,除了这个直率的断言以外,莱布尼兹看不清楚怎样从这样一个粗糙的式子 $\sum y\mathrm{d}x$ 去得到面积,即怎样从一组矩形得到曲线下的面积.当然,这个困难不仅困扰了牛顿和莱布尼兹,也困扰了 17 世纪所有的数学家,这主要是因为没有清楚的极限概念.

1686 年,莱布尼兹在《学艺》上发表第一篇积分学.他是历史上最大的符号学者之一,他所创设的微积分符号,远远优于牛顿的符号,这对微积分的发展有极大的影响.他煞费苦心地研究,要把记号选得最好.当然,他的 $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 仍然是标准的.对于 $n$ 阶微分引进 $\mathrm{d}^n$,甚至对 $\int$ 与 $n$ 重积分别引进 $\mathrm{d}^{-1}$ 与 $\mathrm{d}^{-n}$.

在追溯了自牛顿和莱布尼兹的方法发现以来的微积分发展的历史后,可以看到好多有关的概念还有待澄清.牛顿给他的方法作过三种解释,虽然他认为其中以最初比和最终比的观点最为严密,但仍被当时的很多数学家发现是不可靠的.莱布尼兹虽然自始至终用了无穷小量方法,但对微分的态度仍是摇摆不定的,时而看作不确定量,时面看作定性的零,有时又看作辅助变量.可以说牛顿和莱布尼兹都没有清楚地理解也没有严密地定义他们的基本概念.

尽管微积分兴起的初期有一些逻辑上的缺陷,但大部分数学家则暂时搁下逻辑基础不顾,勇往直前地去开辟新的园地.

## 11.6 微积分的进一步发展

17 世纪最伟大的成就是微积分. 由此产生了数学的一些分支,如微分方程、无穷级数、微分几何、函数论、积分方程、变分法、泛函分析等等,这些学科的总称也常常叫做数学分析,有时被用作是微积分的同义语.

17、18 世纪的数学史,几乎全部是数学分析的历史. 大部分数学家的注意力,都被这有无限发展前途的学科所吸引. 在这方面有特殊功荣的,首先是瑞士的贝努利家族,大数学家欧拉和拉格朗日,还有英国的泰勒等人. 关于贝努利家族及其对变分法的贡献将在后面专章叙述.

英国的泰勒(Brook Taylor,1685 ~ 1731) 于 1712 年提出"泰勒级数"

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots,$$

1715 年载在他的名著《增量方法》中. 严格的证明是柯西在 100 多年以后给出的. 苏格兰的马克劳林(Colin Maclaurin,1698 ~ 1746)提出"马克劳林"级数

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots,$$

这是泰勒级数的特例.

微分方程和微积分的产生很难分出先后,纳皮尔发现对数,实质上已近似解出了微分方程$\frac{\mathrm{d}(a-y)}{\mathrm{d}t} = y$. 牛顿几乎在建立微积分的同时,使用无穷级数解一阶微分方程. 莱布尼兹和贝努利兄弟各自解决了雅各·贝努利提出的"贝努利方程":

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y,$$

并指出经代换后可化为线性方程.

1728 年欧拉(Leonhard Euler,1707 ~ 1783) 开始讨论二阶方程的解,以表示振动弦的形状,这是最早受到注意的偏微分方程.欧拉是约翰·贝努利的得意学生.欧拉在数学著作方面惊人地多产,人们可以在当时数学的几乎所有分支中找到他的名字,其中有欧拉公式、欧拉多项式、欧拉常数、欧拉积分和欧拉线等等,数也数不清.他将数学应用到整个物理领域中去,创立了分析力学与刚体力学,他的《航海科学》与《船舶制造和结构全论》都是出色的著作.他从 19 岁起就开始写作,直到 76 岁,在半个多世纪中,他写下了数以百计的书籍和论文,历史学家把欧拉列为有史以来贡献最大的四位数学家之一,当代人称欧拉为“分析的化身”,法国天文物理学家阿拉哥说:“欧拉计算好像一点也不费力,正和人呼吸空气,或者老鹰乘风飞翔一样.”可以说整个 18 世纪的数学,特别是分析学的发展和欧拉是分不开的.

法国数学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736 ~ 1813)是稍后于欧拉的大数学家.他出生于意大利的都灵,曾在都灵大学学习过.他的父亲打算让他专攻法律,但他却深深地爱上了自然科学,首先是被古典的几何学所吸引,后又看到哈雷所写的关于牛顿微积分的一篇短文,他惊讶地看到,牛顿高明的数学理论,将宇宙万物的运行安排得那样和谐,这为他打开了一个崭新的世界,使他对分析学产生了兴趣,18 岁时就曾独立推导出两个函数乘积求导的莱布尼兹公式.他的不朽之作《分析力学》几乎用去了他一生的时间,从 19 岁开始酝酿,出版时已 52 岁.在这本书里,拉格朗日应用了变分原理,建立了优美而和谐的力学体系.拉格朗日的方程论丰富了代数学的内容.他在数论、连分数、微积分、微分方程、变分法等方面都写出了大量的论文.他晚年完成的两部分析巨著是《解析函数论》和《函数计算讲义》,他企图抛弃自牛顿以来模糊不清的无穷小概念,深信自己巩固了微积分的基础.他先用代数方法证明了泰勒展开式,接着定义导数是 $f(x+h)$ 的泰勒展开式中 $h$

的系数,然后建立起全部的分析学.他以为这样就可以克服极限理论的困难,可是无穷级数的收敛问题,仍然无法逃避极限概念.《解析函数论》在这方面也没有成功,但对函数的抽象处理,却可说是实变函数论的起点.

拉普拉斯(Pierre Simon Laplace,1749 ~ 1827)是法国著名的数学家,他的主要著作有《宇宙体系论》、《天体力学》和《分析概率论》.在《天体力学》中出现了"拉普拉斯方程":

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

他的概率论著作《分析概率论》总结了那一时代整个概率论的研究,包含了丰富的几何概率论、贝努利定理以及最小二乘法的讨论,并引入了"拉普拉斯变换".

拉普拉斯曾参与巴黎师范学院和理工大学的创建工作,拿破仑给他很多名位,任命他为内政部长,6个月后,认为他不能称职,罢了他的官,讥讽他想将"无穷小的精神"带入工作中.

18世纪数学分析的发展可以说达到了空前灿烂的程度,发展之迅速,使人来不及检查和巩固这一门学科的理论基础.19世纪初,数学家开始转向数学分析基础的建设,在这方面有突出贡献的该首推数学家柯西(Augustin Louis Cauchy,1789 ~ 1857).他是历史上著名的数学分析专家.柯西是拉格朗日、拉普拉斯朋友的儿子,他们也曾预言他日后必成大器.柯西的贡献遍及数学的各个领域,他撰写了约800种涉及几乎所有数学分支的书籍与论文.特别是在级数、微分方程、数论、复变函数、行列式、群论、天文、光学、弹性力学等方面都留下了大量的论文.1821年,在拉普拉斯等人的支持下,柯西出版了他的《分析教程》.他最巨大的贡献之一是在微积分中引进严格的方法,这些方法主要见于他的三大著作:《分析教程》(1821),《无限小计算概要》(1823)与《微分学讲义》(1829).通过这些著作,柯西赋予微积分以今天所带有的特色,作出较任何

人更多的贡献.柯西的极限定义至今还普遍沿用着,连续、导数、微分、积分、无穷级数的和等概念也建立在较坚实的基础上.确切地说,现在所谓极限的柯西定义或 $\varepsilon-\delta$ 定义是半个世纪以后经过维尔斯特拉斯(Karl Weirstrass,1815 ~ 1897)的加工才完成的.柯西时代实数的严格理论还未建立起来,因此极限理论也就不可能完成.

柯西在 1821 年提出 $\varepsilon$ 方法,即所谓极限概念的"算术化",将整个极限过程用不等式来刻画,使无穷的运算化为一系列不等式的推导,后来维尔斯特拉斯将 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 联系起来,完成了 $\varepsilon-\delta$ 方法.虽然这样,我们还是可以说,微积分学的基本概念由于柯西而得到严格的论述,柯西是严格微积分学的奠基者.

柯西以后,分析学的逻辑基础发展史上的重大事件是实数理论的建立,这主要应归功于戴德金、康托尔、维尔斯特拉斯等人.

戴德金(Wilhelm Richard Dedekind,1831 ~ 1916)是德国的大数学家,他最有名的著作是《连续性与无理数》和《数的意义》.1872年,戴德金提出用"分划"来定义无理数,而康托尔(Georg Cantor,1845 ~ 1918)则用"有理基本序列"来定义无理数.所谓有理基本序列,是指具有下述性质的有理数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$:对于任意的正数 $\varepsilon$,只要 $m,n$ 充分大,就有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$.康托尔的无理数理论于 1872 年发表于德国的《数学纪事》.同一年,海涅发表论文,对康托尔的理论有所推进,在这篇文章中海涅提出覆盖定理的基本思想,1895 年为波莱尔所完善,现称为"海涅 - 波莱尔定理",或"有限覆盖定理".

维尔斯特拉斯早年是中学教师,他除了教数学、物理之外,还教德语、作文、地理,他对数学始终有浓厚的兴趣,白天有繁重的教学任务,他只好利用晚间,废寝忘食地钻研数学.某夜,维尔斯特拉斯进行一项重大问题的突破工作,竟不知道东方已晓,直到校长到寝室来查看为什么没上八点钟的课时,他才猛然醒悟,请求校长原

谅他缺了课,因为他希望不久这项重大发现将会使学术界震惊.

1864年,维尔斯特拉斯成为柏林大学的教授.他是将严格的论证引入分析学的一位大师.作为一个反例,他发现处处不可微的连续函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x),$$

其中 $0<b<1, ab>1+\frac{3}{2}\pi$, $a$ 是一个奇数.这个反例使数学界为之一惊,因为人们过去总以为连续函数只可能在个别点处不可微.1860年,维尔斯特拉斯用递增有界数列来定义无理数.1892年,巴赫门在维尔斯特拉斯工作的基础上,提出"区间套原理",用来建立实数理论.

有了实数的三大派理论:戴德金的"分划",康托尔、海涅的"基本序列",维尔斯特拉斯的"有界单调序列",加上集合论和柯西、维尔斯特拉斯的极限论,使数学分析结束了300多年的混乱局面,建立在牢固的逻辑基础上.其逻辑上的严密性,有如欧几里得几何学一般的令人惊叹;其形式上的严谨性,实非古希腊人所能梦想.关于微积分学的发展,毕达哥拉斯的名言是惊人的贴切:万物皆数!

# 12 从"几何学中的海伦"谈起

## 12.1 "几何学中的海伦"

了解古希腊文明的人也许都不会忘记,在古希腊神话中,斯巴达王墨涅拉俄斯的妻子海伦是天下第一美人,为了争夺这位绝代佳人,古希腊的英雄们竞相登场,上演了"奥赛罗"这一千古悲剧.在由古希腊人开辟的几何学领域中,也有这样一位"绝代佳人",这就是人们称之为"几何学中的海伦"的旋轮线.要详细地介绍这个问题,还必须从数学史中著名的贝努利家族谈起.

贝努利家族祖居荷兰,由于他们信仰新教而受到天主教徒的迫害,不得不移居瑞士巴塞尔,后成为瑞士巴塞尔的数学大家族.祖孙四代有数学家几十人,这恐怕是空前绝后的.贡献最大的是雅各·贝努利(James Bernoulli,1654 — 1705)和约翰·贝努利(John Bernoulli, 1667 — 1748)兄弟俩,他们都是莱布尼兹的朋友.他们迅速接受并发扬光大了莱布尼兹的学说.

雅各·贝努利在1694年首次给出直角坐标和极坐标的曲率半径公式,这也是系统地使用极坐标的开始.同年的一篇论文讨论了双纽线的性质,"贝努利双纽线"之名由此而起.雅各·贝努利对对数螺线也有深入的研究,他发现经过各种变换后,结果还是对数螺线,如对数螺线的渐屈线和渐伸线都是对数螺线.他在惊叹这种曲线神奇巧妙之余,效法阿基米德,在遗嘱里说要将对数螺线刻

在墓碑上，以作永久纪念，并附词："虽然改变了，我还是和原来一样."雅各·贝努利的巨著《猜度术》于1713年出版，可以说这是概率论史上的一件大事.

约翰·贝努利本来学医，后改行从事数学研究，1705年成为大学教授. 约翰比雅各年龄要小得多，当他步入数学界时，雅各已经是欧洲大陆数学界举足轻重的名人了. 也许是受中世纪骑士风度的影响，为了尽快成名，他开始与哥哥竞争，在许多问题上向雅各提出挑战，甚至毫不掩饰地将哥哥以及别人的成果攫为己有. 起初雅各是宽容的，但很快被弟弟的不择手段激怒了，并照样予以还击. 这场兄弟间的大论战引起欧洲数学界的普遍关注. 尽管连他们二人共同敬佩的莱布尼兹也出面进行调停，也未能从根本上解决问题.

1696年，约翰在解决了其哥哥雅各提出的悬链线问题后，在《教师学报》上提出了一个著名的数学问题——最速降线问题，即要求一条从定点到不在其垂直下方的一点的曲线，在不考虑摩擦和空气阻力的情况下，使得质点沿着这条曲线从定点下滑到另一点所用的时间最短. 如图12－1，$O$，$P$不在同一条竖直线上，在连接这两个点的所有曲线中，怎样找出一条曲线，使得一个质点在重力作用下无摩擦地沿着它从$O$点滑到$P$点所需的时间最少？在图12—1中，我们只画出了从$O$到$P$点的三条曲线即直线、旋轮线和圆的一段(事实上，从$O$点到$P$点的曲线有无数多条). 这个问题是说，当三个钢珠分别从$O$点沿着这三条光滑的曲线同时滚下时，沿哪一条路径滑行最先到达$P$点. 直觉上，沿直线走所经过的路径最短，时间可能短些；而沿旋轮线或圆弧走，虽然路径长一些，但由于前一段获得的速度较

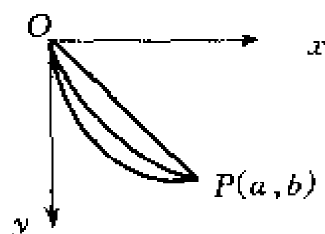


图12—1

大,因惯性的作用,在后一段也可能以较大的速度先到达 $P$ 点,不过,弧线太弯了,路途就要变长,即使是速度快,也需要较长的时间.到底是哪一条曲线好呢?这个问题相当于选择怎样的被积函数 $f(x)$,使得下列表示下降时间的积分

$$J=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\sqrt{\frac{1+[f'(x)]^2}{f(x)}}\mathrm{d}x$$

取得最小值,这里的 $g$ 是重力加速度.这个问题在当时困难得可怕.因为它不同于普通的极大极小值问题,它是要求出一个未知函数(曲线)来满足条件.尽管当时几乎所有优秀的数学家都来研究它,但六个月过去了,仍丝毫没有进展.1696 年 12 月,数学家们又在更大范围内征求这个问题的解答.

1697 年 1 月 29 日,当牛顿从朋友那里听到这个消息后,利用当天晚饭后的空余时间,漂亮地解决了这个问题,并将这个结果寄给皇家学会.当时有关微积分发明的优先权问题使英伦三岛与欧洲大陆的数学家们正争论不休,为了防止论战的进一步升级,他隐匿了自己的姓名.不过据说当贝努利兄弟看到这个解答时,还是惊叫道:"啊,我认出了狮子用它的巨爪了."

事实上,在 1697 年的上半年,除了牛顿以外,贝努利兄弟、莱布尼兹和洛必塔等人一起得到了这个问题的正确解答,即一条连接 $O$ 点和 $P$ 点的上凹的旋轮线.所有的这些解答都发表在 1697 年 5 月号的《教师学报》上.

那么,旋轮线是怎样的一条曲线呢?

如图 12－2,在半径为 $a$ 的圆轮的边缘上安置一盏电灯 $P$,当圆轮沿着一条定直线旋转时,固定在轮缘上的灯光画出的就是旋轮线,它的曲线方程为

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

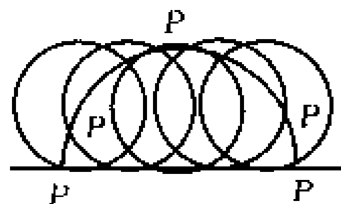


图 12—2

这条被称为"几何学中的海伦"的曲线现在已不神秘，几乎在任何一本高等数学的著作中都可找到.

事实上，最早注意到这个曲线的是伽利略，他曾建议用来作为建筑桥拱的曲线，不久，他又求得此线一拱下的面积为 $2a^2$，并发现了作该曲线的切线的方法. 1658 年，设计伦敦圣保罗教堂的伟大建筑师雷恩找到了计算旋轮线长度的方法，得到旋轮线一拱的弧长为 $8a$.

对旋轮线的研究最为深入的是惠更斯. 1673 年，在《钟表的振动》一书中，他仔细地研究了旋轮线，发现旋轮线的渐屈线仍然是一条旋轮线，并与原旋轮线同样大小. 这个意义在于：沿着旋轮线弧摆动的摆锤，不论其振幅大小，做一次完全摆动所用的时间是完全相同的，因此旋轮线也称为摆线或等时曲线.

当贝努利兄弟发现旋轮线也是最速降线问题的解时，十分惊奇，他们由衷地说："我们的确佩服惠更斯，因为是他第一个发现一个重质点，不论其起点如何，总以相同的时间描出一条旋轮线. 但是，当我们说正是这同一条旋轮线 —— 惠更斯的等时曲线 —— 就是我们正在寻找的最速降线时，你们将感到更加惊奇." 因为旋轮线有着如此美好的物理、数学特性，难怪数学家们赞美她为"几何学中的海伦"呢！

若仅以上述所言，旋轮线还不足以如此名扬千古，更重要的是，它是引起产生一门与微分方程同等重要的新数学分支 —— 变分法的主要因素之一. 导致变分法产生的另一个因素是所谓等周问题，即在给定周长的所有封闭平面曲线中，求一条曲线，使它所

围的面积最大.这个问题可以追溯到古希腊,据说古腓尼基的狄多公主在丈夫被人杀害后,带着自己的财产,在一些贵族的伴随下,逃到北非地中海沿岸的利比亚,当地人害怕她在此休生养息后再成霸业,但又不愿过分为难她,故他们允许这位公主购置一块可用一张牛皮围起来的土地,精明的公主把牛皮割成非常细小的线,将这些线依托海岸围成一个半圆,这正是围出最大面积的正确方法.

这两类问题可以归结为一种提法,即求函数 $y = f(x)$,使得

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

达到极值,这就是所谓的变分法问题.

## 12.2 欧拉和拉格朗日的工作

变分法的问世,使得微积分这一重要数学分支的作用又一次得到验证,许多世界一流的数学家纷纷投身到这一领域的研究之中.

在这些大师中,最先领会贝努利方法真谛的还应首推与这个家族关系十分密切的欧拉.作为贝努利家族的嫡传弟子,欧拉对于变分法的研究可谓情有独钟.1728 年,在约翰的建议下,欧拉开始研究测地线问题,即求曲面上两点间长度最短的路径,如果曲面是平面的话,所涉及的积分是

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

其答案当然是一段直线.这个时期人们最感兴趣的测地线问题与地球表面上的最短路径有关.在约翰的指导下,欧拉利用测地线的密切平面与曲面正交的有关性质成功地解决了这个问题.6 年后,他又推广了最速降线问题,使得极小化的量不是时间而是别的一些量,并且考虑了质点在阻尼介质中运动的情形.

然而，欧拉并没有以此为满足，而是深入下去寻找这类问题的更一般的方法. 他简化了雅各的方法，即用有限和代替问题中的积分，用差商代替被积函数中的导数，这样就把积分化为由弧 $y(x)$ 的有限个坐标构成的一个数值函数，然后变动其中的一个或几个坐标，计算出由此引起的积分变差，引出一个差分方程，进而得到极小化弧所必须满足的微分方程，这个方程一般情形下是一个非线性的二阶常微分方程，同时它也是极大化或极小化所必须满足的必要条件. 欧拉这一方法直至今天仍然是变分法的基本方法.

利用这一方法，欧拉陆续解决了一些包含特殊边界条件的更难的问题. 例如在 1742 年，丹尼尔 · 贝努利的一封信提出了这样一个问题：一根两端受到压力作用的弹性杆，在其弯曲后所取曲线的沿线曲率的平方达到极小情况下，求该杆弯曲的形状. 欧拉经过一番努力，不仅推导出杆的形状取椭圆积分的形式，而且还给出了不同类型端点条件的解，这些成果发表在他于 1744 年出版的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书中，这本书的出版，标志着变分法作为一个新的数学分支诞生了，同时也给欧拉带来了声誉 —— 被看作是当时活着的最伟大的数学家.

欧拉关于“等周问题”的研究引起了拉格朗日的注意，但他放弃了贝努利兄弟和欧拉所采用的繁琐的几何论证，完全采用纯分析的方法，从而免去了不少的限制条件. 1775 年，他发表论文《论确定不定积分公式的极大和极小的一个新方法》，给出了适用于一类范围很广的问题的一个系统而又统一的方法. 这类问题可表示为使积分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

极大化或极小化，其中 $y(x)$ 是待定的. 拉格朗日引进了通过端点 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_2, y_2)$ 的新曲线，并将这些新的曲线表示为 $y(x) + \delta y(x)$，这里的 $\delta$ 是由拉格朗日引进的一个特殊符号，用来表示

整个曲线 $y(x)$ 的变分.显然,在上述积分的被积函数中引进一条新的曲线必然会改变 $J$ 的值,他将 $J$ 的增量记为 $\Delta J$,即

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}[f(x,y+\delta y,y'+\delta y')-f(x,y,y')]\mathrm{d}x.$$

拉格朗日将 $f$ 看作是三个变量的函数,但因为 $x$ 是不变的,所以对一个双变量函数应用泰勒定理将其展开得

$$\Delta J=\delta J+\frac{1}{2!}\delta^2 J+\frac{1}{3!}\delta^3 J+\cdots.$$

其中

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}(f_y\delta y+f_{y'}\delta y')\mathrm{d}x$$

叫做 $J$ 的一次变分;

$$\delta^2 J=\int_{x_1}^{x_2}[f_{yy}(\delta y)^2+2f_{yy'}(\delta y)(\delta y')+f_{y'y'}(\delta y')^2\mathrm{d}x$$

叫做 $J$ 的二次变分;依次类推.接着,拉格朗日论证了:对于极大或极小化函数 $y(x)$,$\delta J$ 一定等于0,进而进一步得出 $\delta y$ 的系数必须为0,即 $f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{y'})=0$,这一结果就是现在众所周知的变分法基本引理,而这个方程称为欧拉微分方程.此外,拉格朗日还首次推导出具有变动端点问题的极小化曲线必须满足的端点条件.后来,他将其关于变分法的论文的内容编进了他的名著《分析力学》之中.

## 12.3 来自物理学的推动

正当变分问题的解取得突破性进展的时候,物理学给这一课题的研究直接提供了一个新的推动,这就是最小作用原理.

早在古希腊时代,自然哲学家们就有这样一种信念:大自然是以最简捷的可能途径行动的,"自然界不做多余的事情",这一观念在中世纪为人们普遍接受.17 世纪费尔马在对光学的研究中提出了一个最小时间原理:光取费时最小的路径传播.他曾怀疑过光的

折射定律的正确性,但他很快发现,由他的原理可以推导出光的折射定律,这样他不仅解除了这种怀疑,而且更加确信他的原理的正确性.1744 年,莫佩蒂(Maupertuis,1698 ~ 1759)从费尔马的最小时间原理出发,提出了更为一般的最小作用原理:自然界中的任何改变都是主要使"作用"最小,而所谓"作用"是指质量、速度的乘积关于路径的积分即$\int mv\mathrm{d}s$.他宣称,这一原理是自然界的普遍规律和上帝存在的第一个科学证明.显然,莫佩蒂极力提倡这个原理还有着不可低估的宗教倾向,这与欧拉的思想不谋而合,在欧拉给莫佩蒂的通信中就表明了这样的观点:上帝已经按照某种这样的基本原理构造了宇宙,而这种原理的存在又证实了上帝的安排.他曾将最小作用原理作为一个精确的动力学定理作了详细的阐述,但他仅讨论了单个质点沿平面曲线的运动问题.

拉格朗日可以说是第一个用具体形式将最小作用原理表示出来的人,这种具体形式就是对动力学中的单个质点的运动而言,质量、速度和两个而定点之间的距离的乘积的积分是一个极大值或极小值,即对于这个质点所取的实际路径而言,$\int mv\mathrm{d}s$ 必须是极大或极小的.他还断言对于质点组而言,这个原理也是正确的,甚至对于广义质量也是如此.

利用最小作用原理和变分法的方法,拉格朗日得到了他的著名的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.$$

这个方程以及其他的一些结论与牛顿第二运动定律是等价的.从数学的观点来看,拉格朗日关于最小作用原理的工作赋予变分法以重大的价值.

## 12.4 变分法的进一步发展

无论是欧拉还是拉格朗日,他们都意识到,要使积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

取得极大或极小解,欧拉微分方程 $f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{y'})=0$ 只是其应满足的一个必要条件,他们用微分方程来求解,然后凭借直观或物理背景来决定这个解是否提供一个极大或极小,这就有点像在普通微积分中使 $y=f(x)$ 取极大或极小的 $x$ 值一定满足 $f'(x)=0$,但反过来满足 $f'(x)=0$ 的 $x$ 的值不一定使 $y=f(x)$ 取得极大或极小值.

欧拉和拉格朗日留给后人的问题是:欧拉微分方程的解必须满足什么样的附加条件才能真正使一个依赖于 $y(x)$ 的积分取得极大或极小?另外两位法国数学家拉普拉斯和勒让德(Adrien Marie Legendre,1752 ~ 1833)首先开始了对这个问题的探索.拉普拉斯没有成功,而勒让德则是从普通微积分的相关结论中寻找启示的.在普通微积分中对于使 $f'(x)=0$ 的 $x$ 值,$f''(x)$ 的符号决定着 $f(x)$ 是否取得极大或极小值.故他以二次变分 $\delta^2 J$ 为突破口,得出结论:对于满足欧拉方程并且通过 $(x_0,y_0)$ 和 $(x_1,y_1)$ 的曲线 $y(x)$,只要沿 $y(x)$ 的每一点处 $f_{y'y'}\leqslant 0$,则 $J$ 取极大;而 $f_{y'y'}\geqslant 0$ 时 $J$ 取极小,但后来他又发现关于 $f_{y'y'}$ 的这一条件仅仅是使 $y(x)$ 成为极大或极小曲线的一个必要条件.寻求使积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

达到极大或极小的曲线 $y(x)$ 的充分条件仍然未能解决.

在勒让德的工作以后大约 50 年的期间内,数学家们进一步探索了一次和二次变分,但都没有得到决定性的结果.1837 年雅可

比试图通过强化勒让德条件使之成为充分条件，然而他所得到的一些充分条件都是不正确的，不过他的工作使人们清楚地看到，变分法的进展不能仅以通常的微积分的极大和极小理论为指导.

维尔斯特拉斯在 1879 年证明了有关弱变分的一个充分条件，并通过引进“场”的概念提出了有关强变分的充分条件，这个条件后来由希尔伯特于 1900 年给出了证明.

在应用方面，拉格朗日用最小作用原理对动力学规律的成功描述，启示着这一概念应该可以应用到物理学的其它分支上去. 19 世纪初期，许多数学家都致力于这一工作，泊松、柯西等人成功地运用变分法解决过许多有关弹性问题，而其中最突出的是哈密尔顿，他从最小作用原理出发，发表了一系列论文建立了光学的数学理论，他所提出的原理更具有一般性，他的工作不仅推动了变分法的进一步研究，而且也描动了常微分方程组和一阶偏微分方程组的进一步研究.

# 13 来自物理学的问题

在数学中，微分方程被定义为含有未知函数的导数的方程，它可以说是方程与微分两个概念结合的产物．当牛顿、莱布尼兹创立了微积分以后，数学家们便开始谋求用微积分这一有力的工具去解决愈来愈多的物理问题，但他们很快发现不得不去对付一类新的更复杂的问题，这类问题不能通过简单的积分解决，要解决这类问题需要专门的技术，这样，微分方程这门学科就应运而生了．

## 13.1 几个著名的问题

早在牛顿甚至牛顿以前的时代，微分方程就开始进入到数学家的生活中来了．摆是人们日常生活中司空见惯的现象，如老式时钟的钟锤的摆动等，然而在数学家的眼里却是一个难得的课题：这就是沿着怎样的一条曲线，使得摆锤摆动的周期与振幅无关？惠更斯从几何上引进摆线解决了这个问题．出人意料的是由这个问题又引出了一个更为深刻的问题．根据惠更斯等人的研究成果，摆的近似周期 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 依赖于重力加速度 $g$，故用摆的周期可以测量地球表面不同地点的重力，只要沿着地球的一条经线依次测量出相当于纬度改变一度的长度，再利用某一理论和相应的 $g$ 值，就可确定地球的形状．事实上，牛顿根据观察到的摆周期随地球表面不同地点的变化推断出：地球在赤道上是鼓起的，地球的赤道半径比极半径超过 1/230．为了对牛顿的推断加以核实，许多科学家着手进行实测，可能是测量的工具不太精确，测量的结果不确

定，以致出现两种截然不同的结论. 然而此时的牛顿却更深入到天文学中的“三体问题”中去了. 所谓三体问题是指在太阳和地球引力的作用下月球的状态，这正是研究行星及其卫星在太阳引力和所有别的星体的相互吸引下的运动的开端，这个问题导致了牛顿对二阶微分方程组的探讨，不过，牛顿没有给出这些方程的分析解.

弹性问题也是促使微分方程迅速发展的一个重要课题，这一问题最早是在建筑中考虑房梁在外加荷载下所形成的形状而提出的，这类问题反映在数学中的形式是悬链线方程，振动弦的方程，两端固定的弹性振动弦方程等.

1690 年，贝努利家族中的雅各·贝努利在考虑“求一条曲线，使得一个摆沿着它作一次完全的振动都取相等的时间，而不管摆所经历的弧长大小”这样一个所谓的“等时问题”时，将其归结为求一个微分方程

$$\sqrt{b^2y-a^3}\,\mathrm{d}y=\sqrt{a^3}\,\mathrm{d}x$$

的解，雅各·贝努利认为这个微分等式两端的积分必须相等，并给出解答

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3},$$

这是一条摆线. 在给出这个问题解答的同一篇论文中，雅各·贝努利提出了一个新的问题：一根柔软而不能伸长的弦自由悬挂于两固定点，求这个弦所形成的曲线. 莱布尼兹称此曲线为悬链线. 问题提出一年后，莱布尼兹、惠更斯和约翰·贝努利分别给出了解答. 其中约翰的解答是这样的：首先将其归结为一个微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{S}{C}$，其中 $S$ 是由 $B$ 到任意点 $A$ 之间的弧长，而 $C$ 则是依赖于弦在单位长度内的重量. 从这个微分方程可以推导出我们现在写成 $y$

$=C\cosh\frac{x}{C}$的解,对此约翰感到莫大的骄傲,因为他认为这是胜过自己哥哥的一个重要标志,因为他的哥哥提出这个难题却不能解决它.在这两兄弟的相互竞赛中,在1691年到1692年之间他们先后解决了悬挂着的变密度非弹性软绳、等厚度的弹性绳、以及在每一点上的作用力都指向一固定中心的细绳所成形状的问题.在解决这些问题的过程中,他们总结出了解微分方程的变量分离法.特别是约翰·贝努利对这些作了完整的阐明,证明了如何将一次齐次方程化为可以分离变量类型的方程,并将这种方法用到求正交轨线的方程上.这一方法实际上最早应归功于莱布尼兹.

至于著名的贝努利方程$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y^{(n)}$则是由雅各·贝努利于1695年提出的,莱布尼兹利用变换$z=y^{1-n}$将其化为关于$y$和$y'$的线性方程来处理,贝努利兄弟也给出了各自的解法,但本质上都是变量分离法.

## 13.2 欧拉与微分方程

如果说17世纪的微分方程仍然是微积分的一部分的话,18世纪则是微分方程形成自身独特理论体系的全新时代,而在这一时代尤以欧拉的工作最为杰出.

作为贝努利家族的学生,欧拉是不可能置身于这个家族关于微分方程解法的讨论之外的.在贝努利家族的影响下,从研究力学问题入手,开始了微分方程的研究,并给出了一系列有关全微分方程的理论.所谓全微分方程是指方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

中的$Mdx+Ndy$恰好是某个函数$z=f(x,y)$的微分,欧拉称这样的方程为恰当方程.这样的方程,显然只需将其积分即可求解.

当一个一阶微分方程不是全微分方程时,往往可以将方程乘上一个称为积分因子的量,将它化成全微分的形式.虽然使用积分

因子在一阶常微分方程的特殊问题中早已采用过了，但是真正领会这个概念并提供一套可行的办法的是欧拉，他在 1734 年至 1735 年间撰写的一篇论文中，给出了微分方程是恰当方程的条件为$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，并由此确立了可采用积分因子方法的方程的类属．他还证明：如果知道了任何一阶常微分方程的两个积分因子，那么令它们的比等于常数，就是常微分方程的一个积分．

欧拉对于二阶方程的探索来自他的力学工作．例如早在 1728 年，他为普鲁士国王研究了空气阻力对投射体的影响，这个问题一般化，就是在有阻尼介质中的运动，由此可引出二阶的微分方程．他接受并改进了英国人 Benjamin Robins 的工作，改进后的方法在炮兵学中有着广泛的应用．

在对二阶方程的研究中，欧拉考虑了这样一类微分方程

$$ax^m \mathrm{d}x^p = y^n \mathrm{d}y^{p-2}\mathrm{d}^2 y,$$

它的微商形式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{p-2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{ax^m}{y^n}.$$

他通过引进方程 $y=e^v t(v)$，$x=e^{\alpha v}$，引进新的变量 $t$ 和 $v$，这里的 $\alpha$ 是待定常数，则这两个方程可看作是 $x, y$ 关于 $v$ 的参数方程，这样就可以计算出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，而且代入微商形式后就得到 $t$ 作为 $v$ 的函数的一个二阶方程，然后固定 $\alpha$，消去指数因子，再作变换 $z=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，就将二阶方程化为一阶方程了．欧拉的这种方法虽然只适用于一类二阶方程，但却具有重要的历史意义，因为它开始了二阶方程的系统研究．欧拉所引进的指数函数，在求解二阶方程以及更高阶方程中起着特别重要的作用．

在常微分方程的早期历史中，非线性的黎卡提（Riccati，1676～1754）方程

$$\frac{dy}{dx}=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2$$

引起了数学家的高度重视,因为这个方程可用来帮助求解二阶常微分方程.黎卡提考虑了曲率半径只依赖于纵坐标的曲线而得到

$$x^m\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{d^2y}{dp^2}+\left(\frac{dy}{dp}\right)^2.$$

在这里,$x$ 与 $y$ 是 $p$ 的函数.作变量替换后,就可得到一阶方程

$$x^m\frac{dq}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{u^2}{q},$$

再假定 $q$ 是 $x$ 的幂函数,例如为 $x^n$,则可化为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{u^2}{x^n}=nx^{m+n-1}.$$

于是对于特殊的 $n$,就可以利用常微分方程的分离变量法求解.这样,黎卡提不仅处理了二阶微分方程,而且有了把二阶方程化为一阶方程的想法,而这种想法正是处理高阶常微分方程的主要方法.

欧拉在 1760 年研究了黎卡提方程

$$\frac{dz}{dx}+z^2=ax^n,$$

证明了若已知一特殊积分 $v$,则作变换 $z=v+u^{-1}$,可将方程化成线性的,而且,若已知二个特殊积分,则求解原方程的问题就可化为求积分的问题了.另一位数学家泰勒在求解一阶二次方程时注意到,有一种解是不能从通解中给积分常数以确定的值而得到的,这是关于微分方程的奇解的最早发现.此外莱布尼兹也曾观察到:一个解族的包络本身也是一个解.克莱罗与欧拉设法从微分方程本身求出奇解,即从:$f(x,y,y')=0$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 中消去 $y'$,他们也知道奇解并不是一个特解,欧拉甚至还给出了一个鉴别奇解的判别法.对奇解与通解的联系首先作出系统研究的是拉格朗日,他提出了从通解中消去常数得到奇解的漂亮方法,更重要的是,他给

出了奇解是积分曲线族的包络的几何解释.

1734 年 12 月,丹尼尔·贝努利(Daniel Bernoulli,1700～1782)给当时在彼得堡的欧拉写信,说他已经解决了一端固定在墙上而另一端自由的弹性横梁(钢质或木质的)的横向位移的问题,得到的微分方程为

$$k^4 \frac{d^4 y}{dx^4} = y.$$

其中 $k$ 是常数,$x$ 是横梁上距自由端的距离,$y$ 是在 $x$ 点的相对于横梁未弯曲位置的垂直位移.欧拉很快回信说,他自己也已发现了这个方程,并且经过研究发现这个方程除了用级数外无法积分.

正是这一弹性问题促使欧拉考虑求解常系数一般线性方程的数学问题,他在 1739 年 9 月 15 日给约翰·贝努利的信中说自己已取得了成功.欧拉考虑了方程

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots + L\frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

这是一个常系数的齐次方程,他指出,这个方程的通解必定包含 $n$ 个任意常数,而且是由 $n$ 个特解分别乘以任意常数后相加而成的.作替换

$$y = \exp[\int r dx],$$

其中 $r$ 是常数,他还指出,得到 $r$ 的方程

$$A + Br + Cr^2 + \cdots + Lr^n = 0,$$

这称为特征方程.当 $q$ 是特征方程的一个实的单根时,

$$y = a \exp[\int q dx]$$

是原微分方程的一个特解;当 $q$ 是特征方程的一个 $k$ 重根时,则

$$y = e^{qx}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \mu x^{k-1})$$

是原微分方程的包含 $k$ 个任意常数的解.他还讨论了共轭复根和复重根的情形,这样欧拉就完整地解决了常系数线性齐次微分方程的求解问题.

对于非齐次的 $n$ 阶线性常微分方程，欧拉所采用的方法是将方程两端同乘以 $e^{\alpha x}\mathrm{d}x$ 后两边积分，再去确定 $\alpha$，从而将方程的阶降低.例如考虑方程

$$C\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Ay=X(x),$$

他将两端乘以 $e^{\alpha x}$ 并两端积分得到

$$\int\left[\mathrm{e}^{\alpha x}C\frac{\mathrm{e}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\mathrm{e}^{\alpha x}B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{\alpha x}Ay\right]\mathrm{d}x=\int e^{\alpha x}X(x)\mathrm{d}x,$$

则左端必定是

$$e^{\alpha x}\left(A'y+B'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

的形式，其中 $A'$，$B'$ 是适当的常数.对它进行微分并与原方程比较，得到 $B'=C$，$A'=B-\alpha C$，$A'=\dfrac{A}{\alpha}$，因而有

$$A-B\alpha+C\alpha^2=0.$$

解之求出 $\alpha$，$A'$，$B'$，则原方程化为

$$A'y+B'\frac{dy}{dx}=\mathrm{e}^{-\alpha x}\int\mathrm{e}^{\alpha x}X(x)dx,$$

这样就将二阶的微分方程转化为一个一阶方程来解.

在欧拉的相关结论的基础上，法国数学家达朗贝尔(Jean le Rond D'Alembert，1717～1783)将其方法加以整理，给出了求非齐次线性微分方程的通解的一般方法，另一位法国数学家拉格朗日则又得出了通过变易常数求变系数常微分方程特解的方法，这些方法是现今求微分方程的有效方法.

此外，欧拉还是微分方程近似解法的创始人.他提出的“欧拉折线法”不仅解决了常微分方程解的存在性问题的证明，而且也是常微分方程数值计算的最主要的方法之一.1750 年欧拉还在莱布尼兹工作的基础之上，给出了我们现在通常所用的微分方程的级数解法：他假定解的形式为

$$y = x^{\lambda}(A + Bx + Cx^2 + \cdots),$$

将 $y$ 以及它的各阶导数(或微商)代入微分方程,利用所得级数中 $x$ 的各次幂的系数必须等于 0 这个条件,确定出 $\lambda$ 与系数 $A,B,C,\cdots$. 例如在研究振动薄膜问题时对于所出现的 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0,$$

他给出的解是

$$u(r) = r^{\beta}\left\{1 - \frac{1}{1\cdot(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^6 + \cdots\right\}.$$

## 13.3 拉普拉斯的摄动法

18 世纪最令科学家特别是数学家与天文家感兴趣的问题莫过于 $n$ 体问题,这在一定的程度上可看作是牛顿已研究过的三体问题的推广. 围绕这一问题的研究主要有两个方向:一是探索人们可以导出什么样的运动方程;二是利用这些初始资料找出其在今后一段时期内的近似解,这被称为摄动法. 对于第一类问题,拉格朗日在他的名著——获奖论文《论三体问题》中给出了一些特殊的数值解. 下面我们重点介绍第二个方向的研究情况.

两个球形的物体,在它们的引力相互作用下,是沿圆锥曲线运动的,这种运动称为非摄动的;而对于这种运动的任何偏离,不管是位置的还是速度的,都称为被摄动的运动..如果两个球体所处的介质对运动具有阻力,或者这两个物体不再是球形的,或者除了这两个物体外还牵涉到更多的物体,那么这些物体的运动轨道将不再是圆锥曲线了. 在未使用望远镜时,这种摄动现象并未受到人们的重视. 到了 18 世纪,计算摄动成为一大数学问题,而达朗贝尔、欧拉、拉格朗日和拉普拉斯都作出了贡献,其中尤以拉普拉斯的工作最为杰出.

拉普拉斯1749年出生于法国诺曼底的皮奥蒙镇,16岁时进入开恩大学学习数学,在那里他曾完成了一篇关于有限差分的论文,受到一些人的肯定.毕业后他给达朗贝尔写了一封长信,向他阐述了力学的一般原理,这引起了达朗贝尔的重视,在达朗贝尔的推荐下,拉普拉斯成为巴黎军事学校的数学教授.在参与政治活动的年月里,他也坚持从事科学研究,在1799年至1825年期间,他出版了《天体力学》的五卷本,给出了太阳系力学问题的"完全的"分析解,在这部著作中,他得到了行星运动问题的近似解和计算摄动的所谓的积分常数变值法(又称元素变值法或参数变值法).为了避免对其深奥的数学理论与方法的叙述,对此我们不再作深入的介绍.必须指出的是,尽管拉普拉斯创造了许多新的数学方法,但他从来不关心数学,只是在物理学研究中碰到数学问题时,他才去研究它.

18世纪也是偏微分方程作为一门新的数学学科产生的年代.事实上,直到1765年偏微分方程只在解决物理问题中出现.在达朗贝尔1747年弦振动的工作以前,偏微分方程是作为条件方程给出的,并且只是求它的特解,达朗贝尔的工作使数学家们开始认识到特解与通解之间的差别.关于偏微分方程的第一篇纯数学论文是由欧拉于1765年发表的,开始考虑通解问题.总体来说,18世纪的偏微分方程研究中的主要成就是揭示了它们对于弹性力学、水力学和万有引力问题的重要性,除了拉格朗日在一阶方程方面的工作外,普遍的方法没有发展起来,偏微分方程解的理论还有待形成.

## 13.4 19世纪中几位大师的工作

19世纪是微分方程严格理论的奠定时期.18世纪以后不断出现的特殊的微分方程的求解问题,使数学家逐渐招架不住了,于是

转向对解的存在性问题的思考,即给定一个微分方程,它在给定的初始条件和边界条件下是否有解?这个问题的解决不仅可以使数学家们避免对一些根本无解的方程作无谓的探索,而且直接影响着微分方程基础理论的建立.

第一个考虑微分方程解的存在性问题的是柯西,他成功地给出了两个方法:第一个方法是假定 $f(x,y)$ 和 $f_y$ 在区间 $(x_0,x)$ 和 $(y_0,y)$ 所确立的矩形内部对 $x,y$ 的所有实数都是连续的条件下,证明了方程 $y'=f(x,y)$ 有且只有一个适合初始条件 $y_0=f(x_0)$ 的解 $y=f(x)$. 1876 年德国数学家李卜西兹(Rudolph Lipschitz, 1832～1903)把柯西的条件作了适当的减弱,提出了现在所谓的李卜西兹条件,而这一存在性定理就叫做柯西—李卜西兹定理. 柯西的建立微分方程解的存在性的第二个方法是控制函数或优势函数的方法,这比第一个方法的应用更为广泛. 柯西的工作为常微分方程解析理论的建立奠定了基础. 确立常微分方程解的存在性的第三个方法是由法国数学家毕卡(Emile Picard, 1856～1941)于 1890 年给出的,这个方法通常称为逐次逼近法. 微分方程初值问题解的存在性的证明,有力地推动了人们对各种方程的求解探索.

1833 年力学教授斯图姆(Charles Sturm, 1803～1855)和他的朋友,法兰西学院的数学教授刘维尔(Joseph Liouville, 1809～1882)决定着手研究二阶常微分方程的一般性问题,他们首先考虑的是二阶常微分的边界值问题,给出了一般的二阶方程在给定的条件具有非零解的条件,以及这些解与特征值之间的关系,这在近代物理及技术中有很广泛的应用,并构成了微分方程研究的一个新的方向. 此外刘维尔在 1841 年研究了黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=p(x),$$

得出结论:黎卡提方程的解一般地不能由初等函数给出,这等于宣

告:从 17 世纪起人们所走的那条寻找微分方程的初等解的道路,前途极为有限.

19 世纪末,法国数学家庞加莱(Henri Poincare,1854~1912)为处于十字路口的微分方程研究开辟了前所未有的宽广道路.庞加莱是从两个方向入手的:一是扩充微分方程解的范围,不管是否是初等函数,只要满足微分方程,都加以考虑,这就使得微分方程的可解范围大大扩充,微分方程从而成了特殊函数的丰富来源,微分方程与函数论之间也建立起了密切的联系,从而产生了微分方程解析理论.庞加莱的第二个方向是在不引进新函数的情况下研究微分方程的定性理论.1881~1886 年期间,庞加莱接连发表了题为《由微分方程所确定的积分曲线》的四篇论文,标志着微分方程定性理论的正式建立.

进入 20 世纪以后,数学家的兴趣主要是在非线性方程方面,它的应用已从天文学转移到通讯、服务机构、自动控制系统和电子学等领域,它的研究重点也已从定性研究转移到定量研究上来了.

# 14　从"赌徒的难题"谈起

17 世纪，正当研究现实世界中的必然现象及其规律的必然数学，如微积分、微分方程、积分方程和函数论等数学分支获得巨大发展的时候，一个研究偶然事件的数学分支也开始出现了，这就是所谓或然数学．十分有趣的是，这样一门重要的数学分支竟然起源于对赌博问题的研究．然而，历史事实确是如此．

## 14.1　赌徒的难题

1653 年夏天，法国著名的数学家、物理学家帕斯卡(Blaise Pascal，1623～1662)前往浦埃托镇度假，旅途中，他遇到了骑士梅累，此公是经常出没于赌场的"赌坛老手"．为了消除旅途的寂寞，梅累吹嘘起他的"赌博经"，并向帕斯卡提出了一个十分有趣的"分赌注"的问题．问题是这样的：一次，梅累与其赌友赌掷骰子，每人押了 32 个金币，并事先约定：如果梅累先掷出三个 6 点，或其赌友先掷出三个 4 点，便算赢家．遗憾的是，这场赌注不算小的赌博并未能顺利结束．当梅累掷出两次 6 点，其赌友掷出一次 4 点时，梅累接到通知，要他马上陪同国王接见外宾．君命难违，但就此收回各自的赌注又不甘心，他们只好按照已有的成绩分取这 64 个金币．这下可把他难住了．赌友说，虽然梅累只须再碰上一次 6 点就赢了，但他若再碰上两次 4 点，也就赢了．所以他分得的金币应是梅累的一半，即 64 个金币的三分之一．梅累不同意这样分，他说，即使下次赌友掷出一个 4 点，他还可以分得赌金的二分之一，即

32个;再加上下次他还有一半希望得6点,这样又可分得16个金币,所以他至少应得64个金币的四分之三.谁是谁非,争论不休,其结果也就不得而知了.不过梅累对于此事却一直耿耿于怀,所以,他一碰到大名鼎鼎的帕斯卡,就迫不及待地向他求教了.

众所周知,帕斯卡是一位著名的"数学神童",1623年6月19日,布拉瑟·帕斯卡出生于法国奥弗涅省的克勒芒一个富裕的省议员之家.3岁那年,母亲不幸去世,8岁时,父亲为了专心培育三个子女,辞去省议员的职务,移居巴黎.老帕斯卡是一个数学爱好者,曾以发现"帕斯卡蜗牛线"等闻名于巴黎科学界,他经常带领儿子参加各种科学家的集会,特别是参加梅森学院的活动,使小帕斯卡的天资很快得到开发.帕斯卡从小就很醉心于数学的研究.16岁时,他发现了"帕斯卡六边形定理":"任何内接于圆锥曲线的六边形,三组对边的交点共线."并从这个定理出发,导出了400多条推论,极大地丰富了圆锥曲线的理论.他以此写成的论文《论圆锥曲线》,竟使笛卡儿怀疑是其父亲的作品.成年以后,帕斯卡的数学研究更是成果累累,他的名气也响彻法国甚至整个欧洲.然而,梅累的貌似简单的问题,却真正难住他了.经过长时间的探索,还是不得要领.1654年,帕斯卡不得不写信给他的好友费尔马,和他展开讨论.在与费尔马的通信中,帕斯卡认为,梅累的分法是正确的.在《论算术三角形》(出版于1665年)一书中,他运用组合知识解决了这一问题.其方法是:假设甲、乙二人约定,谁先得 $S$ 分即为赢家.若中断赌局时,甲积 $a(<S)$ 分,乙积 $b(<S)$ 分,则令 $m=S-a$,$n=S-b$,则甲、乙二人应分得赌金之比为

$$\frac{C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{m-1}}.$$

后来,他还研究了更复杂的在多个赌徒间分赌注的问题.

1655年,荷兰数学家惠更斯(Christian Huygens,1629~1695)恰好也在巴黎,他了解到帕斯卡与费尔马的工作详情之后,也饶有

兴趣地参加了他们的讨论，讨论的情况与结果被惠更斯总结成《关于赌博中的推断》(1657 年)一书，这是公认的有关或然数学的奠基之作.

其实，这一问题的萌芽还可追溯到 16 世纪. 例如，意大利数学家卡当就曾计算过二或三颗骰子掷出某一预想总点数的机会问题. 卡当还专门撰写过一本题为《论赌博》的著作，不过此书一直到卡当死后于 1663 年才出版，此时帕斯卡等人对分赌注问题的研究已取得了突破性的进展.

## 14.2 来自保险业的推动

或然数学虽产生于对赌博问题的研究，但促使它迅速发展的直接动力却是来自保险业的需要. 18 世纪的欧洲，工商业迅速发展，一门崭新的事业——保险业开始兴起. 保险公司为了获取丰厚的利润，必须预先确定火灾、水灾、死亡等意外事件发生的概率，据此来确定保险价格. 例如，人寿保险的价格是这样确定的，先对各种年龄死亡的人数进行统计，得到下表：

| 年龄 | 活到该年龄的人数 | 在该年龄死亡的人数 |
|---|---|---|
| 30 | 85441 | 720 |
| 40 | 78106 | 765 |
| 50 | 69804 | 962 |
| 60 | 57917 | 15426 |

由此表，如果一个人 40 岁，那么他当年死亡的概率是 $765 \div 78106 = 0.0098$，若有 10000 个 40 岁的人参加保险，每人付 $a$ 元的保险金，死亡可得 $b$ 元人寿保险金. 预期这 10000 个人中的死亡数是 $10000 \times 0.0098 = 9.8$ 人，因此，保险公司需付出 $9.8b$ 元人寿保险金，其收支差额为 $10000a - 9.8b$，这就是公司的利润. 由此可见，保险公司获得利润的关键在于事先能较准确地确定出所保险项目

中危险发生的概率.

但是,实际保险问题中蕴含着错综复杂的干扰因素,例如人寿保险中的死亡概率常常受到自杀、谋杀、车祸等非正常死亡因素的干扰,不便于人们探求其一般规律,而赌博中的掷骰子就成了较为理想的模型.因此,数学家们便喜欢从这类问题着手去探求偶然现象中的数学关系,这便是我们所熟悉的概率论的基本内容.

## 14.3 概率论的基本方法和大师们的工作

或然数学本质上是研究随机现象的一门科学.这类现象与必然科学截然不同,它的条件与结果之间并不存在某种必然的联系.也就是说,在相同的条件下,可能会发生某一结果,也可能不发生这一结果.例如投掷一枚硬币,既可能正面朝上,也可能反面朝上.但是,这并不意味这类随机现象不存在某种规律,也不意味着就不能用数量来描述和研究它们.还拿投掷硬币来说吧！投掷一次似乎没有什么规律性可言;但当它们大量出现时,在总体上却会呈现出某种规律.人们称这种总体上的规律性为统计规律性,它的存在构成了或然数学研究的基础.

为了便于讨论,数学家们把随机现象中可能发生的那个结果称为随机事件,并用大写英文字母 $A,B,C$ 等表示.或然数学研究的基本内容之一,就是用概率来描述和表示这些随机事件发生的可能性的大小.寻求一个随机事件 $A$ 发生的概率的基本方法是:先求出事件 $A$ 发生的频率,它由事件 $A$ 发生的次数与试验的总次之比确定;增加试验次数,频率若趋向一个稳定的数,那么这个数就是该事件 $A$ 发生的概率,记为 $p(A)$.如前面所举的投掷硬币正面向上的概率 $p(A)=1/2$,显然,任何事件 $A$ 发生的次数不会大于试验总次数,也不会小于0,故总有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

当 $P(A)=1$ 时,即试验中事件 $A$ 每次都发生,我们称之为必然事

件；当 $P(A)=0$ 时，即事件 $A$ 总不会发生，我们称之为不可能事件. 实际上，这两种现象属于必然现象. 这表明，在一定的意义下，必然现象也可看作是或然现象的特殊情况.

如前所述，由于随机现象的统计规律是一种总体规律，必须在大量的同类随机现象中才能呈现出来，所以它的研究方法有着自身的特殊性，其中，统计方法是它的一种基本方法. 或然数学发展到今天，已经成为具有众多分支学科的庞大的数学部门，但其最基本的还是我们比较熟悉的概率论与数理统计. 总的来说，概率论重在理论上的分析，而数理统计重在应用上的研究，二者各具特色，相辅相成.

正如我们前面所说的那样，由于概率论的创立标志着或然数学的诞生，因此，我们将着重介绍概率论这门科学发生、发展的简要情况.

概率论的发生和发展过程大致可分为四个阶段：方法积累、理论概括、系统整理和公理体系完成.

如前所述，关于概率论方法的讨论最初是由帕斯卡和费尔马二人以通信的形式展开的. 他们虽然没有提出明确的概念定义，但他们在估计赌徒获胜的可能性时，总是利用有利情形数与所有可能数之比，这实质上就是早期古典概率的概念. 诸如此类，他们会同惠更斯一起，给出了概率、数学期望等基本概念的雏形，并得到相应的性质和计算方法，这些都表明，当时概率已成为具有本身特定研究对象的一门独立学科.

由于概率论在保险理论、人口统计、射击理论、年度预算、产品检验以及天文学、物理学等学科的应用，很快引起了许多数学家的关注，概率论的发展也随之进入了一个崭新的阶段.

1713 年，雅各·贝努利出版的《推想的艺术》，堪称概率论的第一部重要著作. 在这本书中，他推广了组合理论，用组合公式证明了帕斯卡曾提出的 $n$ 为正数时的二项式定理；得到所谓贝努利定理：若 $p$ 是某一事件单独出现一次的概率，$q$ 是不出现该事件的

概率,则在 $n$ 次试验中,该事件至少出现 $m$ 次的概率等于二项式 $(p+q)^n$ 的展式中的从 $p^n$ 项到 $p^m q^{n-m}$ 项的各项之和.容易看出,这实际上就是概率论中最重要的定律之一——“大数定律”的最早表现形式,由于它的重要地位,1913 年 12 月,彼得格勒学院曾专门举行庆祝会纪念“大数定律”诞生二百周年.雅各·贝努利的工作使得建立在经验分析基础上的频率稳定性的估计理论化,概率论也从此由对特殊问题的求解发展为对一般理论的概括.

1718 年,法国数学家棣莫佛发表了《机遇原理》一书,对概率论的发展作出了重大推进.书中提出了概率乘法法则,以及“正态分布”、“正态分布律”等概念,得到了现在被称为“棣莫佛——拉普拉斯定理”的特例,这也是“中心极限定理”的一部分.18 世纪中比较著名的概率论著作还有英国辛卜生的《论机会的性质和规律》(1740 年)和法国蒲丰(George Louis de Buffon,1707~1788)的《偶然性的算术试验》(1760 年)等.特别是蒲丰,他把概率论与几何结合起来,开始了几何概率的研究,例如,他提出的著名的“蒲丰问题”(或“投针问题”):将一根长为 $2l$ 的针任意投在画有许多平行直线的平面内,这些平行直线间的距离为 $2a(a>l)$,可以证明,针与其中任一直线相交的概率为 $p=\frac{2l}{a\pi}$.当 $p$ 通过实验得到时,我们就可以用之来确定圆周率 $\pi$ 值.蒲丰的这一方法后来发展为著名的蒙特卡洛方法,对于解决许多繁难的积分、线性方程和微分方程问题很有成效.

到了 19 世纪初,概率论的研究开始朝着系统化的方向发展,其中贡献较大的数学家有:法国的拉普拉斯、泊松,德国的高斯,俄国的契比雪夫、马尔科夫等.

拉普拉斯一生写过好几本概率论专著,其中《分析概率论》(1812 年)被誉为古典概率论系统理论的经典之作,全面总结了前一时期的研究成果,并予以严密而又系统的表述;给出了“棣莫佛——拉普拉斯中心极限定理”的理论证明;建立了观察误差的理论和最小二乘法.高斯对于概论论的贡献主要在于奠定了最小二乘

法和误差估计的理论基础.泊松(Baron Poisson,1781～1840)的工作是引入了一种以他的名字命名的重要概率分布——"泊松分布",并推广了"大数定律"和"中心极限定理".

19世纪末20世纪初,俄国数学开始异军突起,他们在概率论领域的工作格外地引人注目.彼得堡学派的奠基人契比雪夫率先脱颖而出,他引入了著名的"契比雪夫不等式",并据此证明了"大数定律"和"中心极限定理".接着他的学生、以概率论研究而著称于世的马尔科夫又提出了一种新的随机过程理论——"马尔科夫过程",由于它在原子物理、理论物理、化学、公用事业等方面的广泛应用,如今已发展成为现代概率论的一个新分支.

概率论的理论系统形成以后,由于它全新的研究方法,在整个18、19两世纪成了的热门学科,几乎所有的科学领域,都企图借助概率论的方法解决实际问题.建立概率论的逻辑基础,成为摆在数学家面前的迫在眉睫的任务.

1917年,前苏联数学家伯恩斯坦首先给出了概率论的公理体系,1933年,柯尔莫哥洛夫以其莫斯科学派所擅长的实变函数论和测度论为基础,又给出了概率论的一个公理体系.这一体系与伯恩斯坦的相比,不仅使现代意义下的概率论理论更加严密完备,而且为论述无限随机试验序列或一般的随机过程提供了足够的逻辑基础,从而应用更加方便.可以说,几乎所有现代概率论的结论都是用柯尔莫哥洛夫的方式加以阐述的,因此,柯尔莫哥洛夫和他的工作成为前苏联数学史上最光辉的一页.

值得我们高兴是,我国数学家在概率论的研究方面也取得了许多重要的成果.青年数学家侯振廷的著名论文《$Q$过程的唯一性准则》得到国内外学者的高度评价,荣获1978年度的英国戴维逊奖.

## 14.4 应用举例

如上所述,由于概率论是通过大量的同类型随机现象的研究,

从中揭示出某种确定的规律,而这种规律性又是许多客观事物所具有的,因此,概率论有着极其广泛的应用.

众所周知,接种牛痘是增强机体抵抗力、预防天花等疾病的有效方法,然而,当牛痘开始在欧洲大规模接种之际,它的副作用引起了人们的争议.为了探求事情的真相,丹尼尔·贝努利根据大量的统计数据,应用概率论的方法,得出了接种牛痘能延长人的平均寿命三年的结论,从而消除了人们的恐惧与怀疑,为这一杰出的医学成果在世界范围内普及扫除了障碍.

另一个有趣的例子是对男女婴出生率的研究.一般人或许会认为,生男生女的可能性是相等的,事实并非如此,一般说来,男婴的出生率要比女婴高一些.最先发现并研究这一现象的不是生理学家,而是数学家.法国数学家拉普拉斯是一位天才的应用大师,他曾成功地将许多数学知识应用于各个领域,1814 年他出版了《概率论的哲学探讨》一书,书中根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料,研究了生男生女的概率问题,发现,在 10 年间,这些地区的男女出生数之比总是摆动在 51.2:48.8 左右,但通过对巴黎地区 40 年间的调查却发现了一些微小的差别,二者的比值是 51.02:48.98,为了弄清这一点,拉普拉斯又特地做了实地调查,发现,巴黎地区"重女轻男",有抛弃男婴的恶俗,这一非自然因素,当然会影响统计规律.为什么男婴的出生率会略高于女婴呢?拉普拉斯从概率论的观点解释说:这是因为含 $x$ 染色体的精子与含 $y$ 染色体的精子进入卵子的机会不完全相同.

值得我们自豪的是,我国数学家在概率论的应用方面也有杰出的成绩.如王梓坤教授在地震预报方面创立了"随机转移"、"相关区"等方法,成功地预报了 1976 年四川松潘地震.他先后发布地震预报 24 次,准确的和比较准确的 17 次,因而多次受到嘉奖.

总之,由于随机观象在现实世界中大量存在,随着科学技术和社会实践的发展,以概率论为基础的或然数学很快发展起来,并越来越显示出它巨大的威力.

# 15. 代数学的解放

每个初学数学的人都清楚地知道，在数学学科中有关于研究空间形式的几何学和关于探讨数量关系的代数学两大分支，或许还曾参与过"是几何学重要，还是代数学重要"的问题的讨论. 事实上，在数学发展史中有两千多年的时间内，几何学曾被认为比代数学更重要. 原因很简单，在古希腊数学界发生的第一次数学危机中，几何可以精确地表示无理量，而代数学当时却是不行的，这就导致了人们认为几何学比代数学更严密. 但是后来有了两个转机，使人们普遍认为：代数学至少是与几何学一样严密可靠的，甚至比几何学更基本.

转机之一是伟大的法国数学家笛卡儿创立了解析几何学，沟通了数形之间的联系，在后来非欧几何的发展中，人们借助解析几何这个工具，发现精确得无与伦比的欧氏几何和与常理如此相悖的非欧几何的可靠性，都要建立在代数学的无矛盾性之上.

转机之二是天才的法国青年数学家伽罗瓦，因方程的可解性理论而开创了群论，而群论的重要用途之一就表现在可以用来统一任何一种几何学.

我们前面已介绍过笛卡儿的思想方法，显然进一步探讨伽罗瓦以及其他为代数学的发展做出贡献的数学家的事迹，就十分必要了. 为此，我们先简略回顾一下代数学这门学科的历史.

## 15.1 19世纪以前的代数学

代数与几何的渊源一样悠久,不过最初不叫"代数"而称为"算术".从字义上讲,所谓"算术"就是"计算数量的技术",这样,自人类有了数的概念的时候就有了关于这些数的运算,也就有了算术.在第一次数学危机爆发后,至少可以这样说,在处于数学知识积累的时期算术与几何是并重的,但当数学一旦进入到理性思维阶段,特别是一些属于数学基础的问题暴露出来后,数学家们便开始手足无措,所以当不可度量出现在数学家们的面前时,他们便开始逃离了,他们把自己的心血倾注到几何上去,几何学便很快形成了一套严密的演绎理论体系,而算术却被古希腊的大部分学者冷落了.尽管如此,由于实际的需要,算术还是缓慢地生长着.

首先,是未知数 $x$ 等字母符号的引入以及符号体系的引入使得算术学科变成代数学科,我们可以这样狭义地理解:所谓"代数",就是"用字母去代替数",这是代数学上最重大的变革之一.

有了符号体系,使得代数学的书写比算术更紧凑、更有效,更重要的是符号体系比文字叙述更为抽象,这样也就有着更广泛的应用.例如,古希腊时期的代数问题都是用类似于如下的文字叙述的:"如果六个人中的四个人得到的苹果分别占苹果总数的三分之一,八分之一,四分之一和五分之一,第五个人得十个,只剩下一个给第六个人,试问苹果的总数是多少?"这样的问题的解法用文字叙述出来是十分罗嗦的,并且解法不具有一般性,这种解法用现代的符号体系写出来就是:

设苹果只数为 $x$,由题意有 $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)x=11$,解之得 $x=120$,这种对一元一次方程解法的讨论,对于其他的一元一次方程也是有效的,而式子 $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)x=11$,也可以是许多其他实际问题的解释.

比起如上形式表示更重要的是其思想方法. 有了符号体系，就可以引入 $x$ 等字母来表示未知数(也可用其它符号表示)，由于有未知数 $x$ 参加运算，就比由已知的具体内容，一点一点地计算出结果来要简单得多. 从思想方法上来说，$x$ 可以参加运算即承认了未知数是存在的，从而所求结果是在存在的前提下根据已知条件逐步推理得出来的，这是一种分析法，显然比综合法要容易些，方程正是这种思想方法的具体体现，而对于方程的研究也就成为两千多年以来代数研究的主要内容.

代数学第二个较大的进展是对方程的解法的讨论. 方程是代数学解决实际问题的有力工具，因此，在代数学中占有很重要的地位. 特别是在 19 世纪以前，方程论实际上就是代数学的代名词，19 世纪以前漫长的数学发展进程中，许多著名的数学家都对方程论做出过重大的贡献.

如前所述，在公元前 2000 年左右的古巴比伦数学中，已难以置信地有了一元二次方程的公式解法. 公元 250 年左右，丢番图的不定方程的解法是古代数学的光辉典范，而三次、四次方程的代数解法则成了 16 世纪最壮观的数学成就，完成这一数学成就的是一些意大利数学家. 在泰塔格利亚和卡当的公式中，首次出现了复数的情况，这与以前在解方程中出现的负数一起，推动了数系的研究，这是代数学研究的另一内容.

对三、四次方程根式解法探讨获得的成功，使大批数学家追求五次和五次以上的方程的根式解法，其中包括像欧拉、拉格朗日这样著名的数学家. 直到 19 世纪人们才知道高于四次的方程是没有一般的代数解法的，即不可能通过对系数(包括常数项)的有限次加、减、乘、除、开方等运算，表示出方程的解来. 代数解法也称为根式解法或公式解法，若不限于此，那么当然有着许多其他的解法，如牛顿法、中国的秦九韶法等等.

方程论的另一个发展方向，是讨论一般的方程能有多少个解

的问题.由于卡当三次方程的公式解法中出现了复数,所以卡当曾经一度认为一个方程可以有任意多个根.但是同样由于公式解法,他又发现三次方程只能有三个根,四次方程只能有四个根.后来人们推测,一般的 $n$ 次方程有 $n$ 个根,这被称为“代数基本定理”,其重要性从其名称可想而知.这个定理的第一个完整的证明是由高斯给出的,他十分欣赏这个定理,一生中曾四次给出这个定理的证明,并且一次比一次简洁严密.

以上简略地叙述了19世纪以前代数学发展的情况,尽管这一时期也有着丰富的成果,但是,仅仅以方程论为主进行讨论未免太狭隘了,特别是17世纪以来,数学的迅猛发展,微积分、解析几何、复变函数、变分法、微分方程、微分几何等大量的数学分支的诞生,使仅仅以方程论为主要内容的代数学相形见绌.若代数学再不能突破狭隘的研究范围,这门历史悠久的学科就会被淹没在大量的现代数学的分支之中.19世纪初非欧几何的诞生引起了几何学的大发展,使几何学得到了解放,那么代数学什么时候才能得到解放呢?

19世纪中叶,沉寂了几千年的代数学终于沿着两个方向迈出了解放的第一步.

其中一个方向是伟大的数学家哈密顿沿用类似于非欧几何诞生的方法进行的.

## 15.2 哈密顿的划时代发现

哈密顿(William Rowan Hamilton,1805～1865)出生于都柏林,他被誉为“是使爱尔兰人在数学领域中享有盛誉的最伟大人物”.事实上,他也是19世纪最伟大的数学家之一.他发明的当时曾一度风靡全球的“哈密顿环游世界”游戏,使他在数学界以外也妇孺皆知.他是其父母九个儿女中的第五个,从小随他终身未娶的叔父生活,在这位叔父的精心栽培下成为一名罕见的神童,据说在

13岁时就能流利地讲13种外语,15岁开始迷上数学,进入大学前,就已掌握了牛顿、拉普拉斯等人的著作的精髓,并撰写过一篇关于焦散曲线的论文,受到爱尔兰皇家科学院的重视. 18岁进入都柏林三一学院学习,21岁当他大学还未毕业时,就被任命为三一学院的天文学教授,由于他在天文学、数学和物理学等方面的卓著功绩,30岁时被封为爵士.

哈密顿在数学上最大的贡献是发现了四元数. 1835年后,即在哈密顿基本结束他在光学和力学上的工作不久,便开始投入到建立数的逻辑基础的研究中去. 1837年,哈密顿发表了《共轭函数及作为纯粹时间的科学的代数》,首次建立起复数的逻辑基础. 文中他首先对复数符号的实质作了解释,他说,复数 $a+ib$ 的符号意义只能理解为是实数的一个有序数对 $(a,b)$,而不能理解成实数 $a$ 和虚数 $bi$ 的和,因为只有这样,在实数中所满足的运算律,才能合理地在复数中得到体现. 这样他就成功地把复数的逻辑基础建立在了实数的基础上,今后人们只要致力于建立实数的逻辑基础,而不必担心复数了. 不过,哈密顿自己并没有去继续建立实数的逻辑基础,而是单刀直入,进行着创立比复数更"高一层次"的新数的尝试. 由于哈密顿澄清了复数的概念,这就使他能更清楚地思考用它来代表空间的向量. 但是,思想的旋律并不总是合拍的,新思想既然要从旧意识中萌生,就不能不受到旧思想的影响,当时哈密顿强烈地意识到他是在创造一种新"数",如复数表示二维向量一样,能用以表示三维空间的向量. 既然是数,那么它就应该像以往人们所接触的数那样,具有数的性质,即应该满足分配律、结合律以及交换律;既然是复数的扩展,那么像复数用 $a+bi$ 表示那样,有理由把它表示为

$$a+bi+cj$$

的形式. 这些设想是自然的,但又都是不符合实际的. 经过一段时期的研究,哈密顿发现他提出的两个设想完全不能统一起来,新数

$a+bi+cj$ 硬是不满足哈密顿自己所谓的“模法则”，即两个向量乘积的模等于这两个向量的模的乘积．当时，哈密顿曾碰到这样的情况：

$$(a+bi+cj)^2=a^2-b^2-c^2+2abi+2acj+2bcij.$$

如果不考虑右式的最末项 $2bc$ij，或者说假设 ij＝0，那么右式 1，i，j 各系数的平方和

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

恰好符合“模法则”．可是 i 和 j 的模都是 1，按照“模法则”ij 的模也应该是 1，因而 ij＝0 的假设又是不合理的．于是哈密顿又假设 ij＝－ji，并设 ij＝k，这样假设的好处是“模法则”成立了，但 $k$ 究竟是什么呢？这时，哈密顿又考虑一般新数的乘积

$$\begin{aligned}&(a+bi+cj)(x+yi+zj)\\&=(ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz+cy)k.\end{aligned}$$

他发现，在这个乘积中，“模法则”正好成立．如果将 k 想像成同时垂直于单位向量 1，i，j 的新单位向量，则上述等式表示两个三维的向量的乘积是四维的向量，真是莫名其妙！哈密顿考虑这些问题至少有 10 个年头了，虽然其间他也不断探索其他问题，但对三维“复数”的寻找始终没有间断过．有时似乎觉得已经成功了，但一经检查又发现了问题，这项工作使他深深地陷入了苦闷之中．

大约从 19 世纪 40 年代起，他不得不放弃对“三元数”的追求而着手对“四元数”$a+bi+cj+dk$ 的考察．起先，他希望“四元数”的乘积应理所当然地满足交换律，但事实证明，这是不可能的，于是他不得不放弃了对乘法交换律的要求，但即使如此，$i，j，k$ 三者之间的乘积仍然不易解决．

1843 年 10 月的一天，哈密顿和妻子正沿着“皇家运河”散步，妻子喋喋不休地谈着家常，他却一点也听不进去，他在想着他的四元数，想着对 $i，j，k$ 三者乘积的处理，突然，一个念头闪电般地出现了：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

“对了,准是这样!”哈密顿抑制不住内心的激动,竟然喊了起来.他怕公式会被遗忘,当即掏出本子,将这个公式记了下来.就这样,至少纠缠了哈密顿15个年头的难题终于解决了.不久,他在爱尔兰皇家科学院例会上宣告了“四元数”的诞生.

“四元数”的诞生,其意义不仅在于提供了一个除了乘法的交换律以外,具有实数和复数性质的代数,也不仅在于它为物理等学科提供了一个适当的数学工具.而在于,在哈密顿以前,人们一直把数的加法、乘法满足性质 $a+b=b+a$ 与 $a\times b=b\times a$ 当作公理接受下来,而哈密顿四元数的乘法却有

$$i\cdot j=k,\ j\cdot i=-k,$$

它不满足乘法的交换律,这与“正统思想”如此相悖!哈密顿工作向数学界表明,在代数中,也可像非欧几何那样,在一组人们几千年来认为是天经地义、不可动摇的代数公理系统中去掉几条或添上几条(这势必由定义抽象意义下的“加法”与“乘法”来完成),就会得到新的代数系.沿着哈密顿所开辟的方向,人们创建了形形色色的代数系,如布尔代数、李代数、若当代数等,代数学终于从传统的束缚中解放了出来.代数解放的另一个方向则是由阿贝尔和伽罗瓦开辟的.

## 15.3 两位年轻人的杰出贡献

在挪威首都奥斯陆的皇家公园里巍然耸立着一座纪念碑,纪念碑的底座是一个只经粗加工打磨的平行六面体,底座上是一位具有“掷铁饼者”般力士身材的裸体青年塑像,他的两脚踏着两个被打倒的雕像,这位力士就是阿贝尔(Niels Henrik Abel, 1802－1829).那两个被踏倒在地的雕像意味着什么,大概只有这个纪念碑的设计者才知道,也许这是阿贝尔短暂一生中所解决的椭圆函数论和用根式解代数方程这两个最重要的问题吧!

然而,阿贝尔并不是一个力士,从他留到今天的唯一的一张画像看,他是一位非常可尊可爱且略带羞怯的青年人.阿贝尔生于挪威的芬德,是一个穷牧师的儿子.尽管家庭贫穷但志气不短,从小就勤奋好学,早在中学时代,就被他的老师洪堡发现具有数学天才.17岁时他就研读了拉格朗日和高斯的著作,并按高斯处理二项方程的方法,寻找高次方程的求根公式.起初他还以为自己找到了方法,就将它们整理成文,后在名家启发下,他发现了错误.但他并没有因此气馁,进人大学后,他靠老师汉斯丁的资助过着艰苦的生活,但仍继续研究方程论,在拉格朗日论文的启发下,终于完成了《论代数方程,证明五次方程的不可解性》的论文,此时,阿贝尔才22岁.为了继续探索高次方程的超越函数解法,阿贝尔在大学毕业不久,又完成了《关于很广一类超越函数的一个一般性质》的论文,创立了椭圆函数理论.

遗憾的是,阿贝尔这两篇开创性的论文,居然找不到发表的地方.他的前一篇论文最终还是他自费印刷的,为了节省开支,文章被压缩得很少有人能看懂;第二篇论文在法国科学院被压了整整15年,在阿贝尔死后十多年才得以正式发表.

由于贫穷、营养不良和过度劳累,阿贝尔染上了肺病,终身没能如愿得到一个职位,27岁时悲惨地死于贫病交加之中.令人伤心的是,在他死后两天,送到一封被耽搁的信,柏林大学向阿贝尔提供了一个为时太晚的教师职位.死后一年多,法国科学院授予他数学大奖,以表彰他和雅可比在椭圆函数论方面的卓越贡献.

阿贝尔的功绩是在他死后很久才被真正认识到的.人们为了纪念这位天才的数学家,将数学中的许多理论与定理都用他的名字命名.法国数学家埃尔米特就这样评价过:"阿贝尔给数学家们留下的事,够他们忙一百多年了".

阿贝尔对于代数方程的公式解做出了精彩的工作,也遗留下了一些更值得进一步研究的课题,遗憾的是,阿贝尔没有来得及进

一步探究即与世长辞了,实际上他离开成功的大门仅是"一步之遥",这个问题被另一位天才的青年数学家伽罗瓦解决.

伽罗瓦(Evarisl Galois,1811～1832)出生于巴黎附近一个小镇镇长的家里,他刚过15岁生日就显示出非凡的数学才能.他父亲将他送入巴黎一所有名的公立中学学习,从这时起他就开始了数学的研究,并很快熟悉了当时的著名数学家包括阿贝尔的著作.但是他两次报考他渴望的巴黎高等工艺学校都失败了.第一次是因为他认为考官们问的问题太简单而拒绝回答,他希望主考官能提一些有难度的问题,结果落榜了.第二次主考官无论如何也弄不明白伽罗瓦设法向他说明的十分简单的问题,气得伽罗瓦随手将擦黑板的抹布扔到了主考官的脸上,当然他又落榜了.

接着他上了一年预科学校,据说在上预科学校的期间,斯图姆(Charles Francois Sturm 1803～1855)刚刚给出判断方程实根个数的方法,伽罗瓦的老师到教室向学生讲述这个有趣的方法,但他讲不出证明,因为斯图姆的文章还未公开发表,伽罗瓦当场给出了整个方法的漂亮的证明,写了整整一黑板,这时他才18岁.

当时,伽罗瓦已将自己研究方程求解的两篇文章呈送法国科学院,但被遗失了.因没有回音,他于第二年(1830年)又写了另一篇关于自已研究成果的论文,呈交法国科学院秘书付里叶,但不久付里叶去世,论文也不知下落.几经挫折的伽罗瓦毫不灰心,于1831年又提交了题为《关于用根式解方程的可解性条件》的论文给泊松,这是他在方程理论方面仅有的一篇完成了的文章,其中包括如群、域等许多新概念及相关全新的理论,泊松看过文章后批了"不知所云"后退回,并劝告他写一份较为详尽的阐述.

可是死神留给伽罗瓦的时间已不多了.伽罗瓦是1830年资产阶级革命的狂热支持者,由于他对不支持革命的学监给予公开的抨击而被关进监狱达半年之久,刚被释放又被迫接受一场有预谋的手枪决斗,伽罗瓦意识到自己将被杀害,在决斗的前夜,他彻夜

未眠,伏案疾书,给一位朋友匆匆留下了记述自己思想的科学遗言.在遗言中他希望人们不应只对他的理论的正确性进行评价,而对其理论的重要性进行评价,他预言,自己的理论最多在100多年后,将成为一种很重要的数学分支.

事实证明,这个预言是正确的.伽罗瓦死后14年,几经周折,他的为数不多的著作公开出版.从这些著作中,人们认识到就对代数学的解放而言,伽罗瓦比哈密顿有着更大的功劳.如前所述,哈密顿发现了“四元数”,开创了现代代数公理化系统的理论,而伽罗瓦尽管最初仅是从方程的根式解入手的,但其关于可根式解的充要条件是几千年来方程论研究的光辉顶点,更重要的是伽罗瓦关于群、域等全新的数学学科的创造,从根本上解放了代数学,使它们成为数学各学科的纽带和应用数学的工具.我们将在下一章专门介绍阿贝尔和伽罗瓦深邃的数学思想和方法.

# 16　青春的华章

17世纪后期，解析几何和微积分的创立，对数学乃至整个人类社会产生了极为重大的影响，整个18世纪几乎都是分析学的时代. 在微积分蓬勃发展的一个多世纪内，作为经典代数学主体的代数方程论的发展却十分缓慢，没有取得任何重大进展. 尽管从某种意义上说，解析几何和微积分都可看成是代数学发展的重要成果，前者成功地将代数方法揉合于几何问题的处理之中，后者则可作为代数的直接扩充. 代数学缓慢发展的状况一直延续到19世纪30年代，由于两个年轻人阿贝尔和伽罗瓦的努力而重新获得动力，他们的理论就像给代数研究注入了新的兴奋剂，代数发展从此加快了前进的步伐，开始了划时代的一页.

## 16.1　方程求根公式的探索

代数的含义曾有过两次大的改变. 一开始，代数被看作是关于字母计算、公式变换、代数方程的科学，后来的主要任务就是解方程，最后，把代数看作是研究各种代数系统的科学. 代数概念后来的这个改变不过只有100多年的历史，在此之前相当长的历史时期内，方程的解法始终被认为是代数研究的中心问题，代数方程的研究大致可分为三个阶段：低次方程的求解、高次方程的探索、一般方程的研究.

### 16.1.1　历史的挑战

方程求解在公元前2000年～公元前1800年就出现了，最早

记录在英国人兰德于1858年发现的古埃及纸草书上,它相当于现在的一元一次方程的求解.古代巴比伦汉穆拉比时代的数学泥板上则刻有二次方程的求解.在古希腊数学中,也记载有用他们所熟悉的几何方法求解二次方程的问题.希腊文明衰落之后,中世纪欧洲的数学也跟着步入了黑暗时期,此时,东方的印度、阿拉伯和中国的数学却异军突起,在解方程方面取得了喜人的成就.例如,阿拉伯的阿尔·花拉子米的《代数学》(820年左右),系统讨论了六种类型的一次、二次方程的解法,并给出了“代数学”这一名称.从此,解方程就成了“代数学”的中心内容.

解方程理论的重大突破发生在16世纪上半叶的意大利,由于费罗的学生菲奥向泰塔格利亚的挑战,解方程进入了辉煌的时代,三次和四次方程的解法成了16世纪最壮观的数学成就,菲奥和泰塔格利亚的竞赛也就成了赋有传奇色彩的历史故事.

### 16.1.2 艰难的探索

由于一般四次方程的解法依赖于解一个相关的三次方程,这就促使人们思考,能否继往开来,将一般高次方程的求解归纳为低一次的方程的求解.欧拉、拉格朗日、高斯都曾作过尝试,结果都失败了.甚至有人突发奇想,如英国的格雷戈里(James Gregory,1638~1675)和德国的契尔恩豪森(Tschirnhausen,1651~1708),希望通过变换把高次方程化为只含 $x$ 的一个乘幂与一个常数项的二项方程来解,结果发现这个变换本身还得依赖于解某些辅助方程,对于五次方程需要先解一个还不知道如何解的六次辅助方程,契氏的奇想也因此破灭.

众多的失败使数学家们认识到,解四次以上的方程并非像传统解方程问题那么简单,拉格朗日和范德蒙(Vandermonde,1735~1796)都已明显感到了问题的复杂性,他们专门发表了长篇总结性文章,详细分析三、四次方程的解法,指出这些成功的解法所根据的情况对于四次以上的方程不可能有效,预言“用根号解四次以

上的方程是不可能解决的问题之一",这个使数学家几乎化了三个世纪劳动的问题被拉格朗日称为是"向人类智慧挑战"的难题.

鲁菲尼(Paolo Ruffini,1765～1822)在拉格朗日的影响下,于1799～1813年间致力于证明四次以上高次代数方程不可根式解,终未成功,但他获得了一条极为重要的定理:如果一个方程能用根式解出,那么根的表达式就能写成这样的形式,其中的根式是已知方程的根和单位根的有理函数,然而他没能给出证明.

尽管四次以上方程的根式解问题未能获得进展,但与解方程相关的一些问题却有相当的成就.高斯第一个对代数基本定理给出了完整的证明,开创了证明存在性问题的新途径;韦达根据这一定理,得到了根与系数的关系;笛卡儿指出了代数方程根的分布情况;斯图姆给出了实系数方程实根情况的判别方法,最值得一提的是,拉格朗日在分析三次方程和四次方程解法时所考虑的"拉格朗日预解式":

$$a+b\varepsilon+c\varepsilon^2+\cdots+l\varepsilon^{n-1},$$

其中 $a,b,c,\cdots,l$ 是方程的根,$\varepsilon$ 是任一 $n$ 次单位根,明确指出这些式子与用根式解方程有密切关系.他甚至感觉到方程根的排列理论比方程根式解的理论更有意义,是"整个问题的真正哲学".事实证明他是对的,他的这种思想成了后来的数学家向世界难题发起攻击的导火索.

### 16.1.3 问题的解决

高于四次的代数方程不可根式解的问题,最终由挪威年轻的数学家阿贝尔所证明.他首先证明了鲁菲尼的定理,并用此定理证明了高于四次的方程根式求解的不可能性.

阿贝尔的成果引起了所有数学家的惊奇,原来令世界范围内那些最伟大的数学家为之奋斗了三个世纪的数学难题之所以未能获得解决,是因为它根本就没有解!

尽管阿贝尔在某种意义上已经完全解决了根式解问题,但是

数学发展并没有就此停滞,阿贝尔之后产生了更美妙的问题吸引着数学家,阿贝尔证明了一般四次以上方程根式求解的不可能性,并没有排除特殊高次方程的根式可解性.比如,高斯就给出过一类二项方程 $x^p-1=0$($p$ 为素数)能用根式求解,阿贝尔自己也找到了一类很广泛的,所谓循环方程及更一般的阿贝尔方程也能用根式求解.因此,需要确定哪些方程可用根号求解,这或许比阿贝尔不可解定理更有意义,即要寻找方程能用根号求解的充要条件.这个问题终由另一个年轻的天才数学家法国的伽罗瓦彻底解决.

困惑了三个世纪,号称"向人类智慧挑战"的难题,竟被两个毛头小伙所征服,不能不令人为之折服.但更令人惊讶的是,他们解决问题的方法几乎使当时所有大数学家都感到一片茫然,直到很多年以后才慢慢清醒过来.

## 16.2 代数结构思想的形成

数学的历史上最令后人感叹的要算是阿贝尔和伽罗瓦这两位数学奇才,人们惊讶他们这么年轻就勇猛地向世界难题发起攻击,并获得成功;人们惊叹他们的方法是如此的先进,令当时的数学家茫然无措,竟要等到他们死后几十年才能感到它们的价值;人们还哀叹这么伟大的数学家,生命竟如此短暂,如同宇宙中的流星,在人间一闪而过.所有这些都增加了后人进一步了解他们的好奇心.

### 16.2.1 不朽的功绩

如前所述,阿贝尔在代数方程的公式解方面做出了卓越的贡献,接着,伽罗瓦跨出了具有重大意义的一步.伽罗瓦的工作是在拉格朗日、高斯、柯西、阿贝尔等人的工作启发之下完成的.他引人了置换群、子群、正规子群等全新的概念,这些都是现今近世代数中的基本概念.他发现了代数方程可用根式解的基本定理——伽罗瓦基本定理:给定一个代数方程,设 $G$ 为该方程的伽罗瓦群(方程根的某个置换群),它的一系列最大正规子群为 $G_i$($i=1,2,\cdots$

$s$),即 $G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_s=E$($E$ 为单元恒等置换群),则原方程可根式解的充要条件为指标$[G_i/G_{i+1}]$($i=0,1,\cdots,s-1$)均为素数.

对于一个一般或特殊的代数方程,伽罗瓦的做法是,先说明如何在不知道根的情况之下找出这个方程在其系数域内的伽罗瓦群 $G$,即根的置换群,然后,再寻找 $G$ 的一个最大正规子群$G_1$,$G_1$ 的确定完全是群论中的技术问题.根据 $G_1$,用一系列有理运算可确定一个根的函数,它在 $G_1$ 的置换下函数值不变,而在其他置换下则要改变值.由这个函数可以构造出一个被称为部分预解式的方程,它的次数正好是$[G_0/G_1]$,其中的一个根也就是上述根的一个函数,将这个根添加到原来的系数域 $R$ 中,得到一个新的域 $R'$,可以证明 $R'$的置换群就是$G_1$.

对 $G_1$ 可重复上述步骤,如果能够找到这个方程在某个指定域内的置换群正好是 $E$,而方程的所有根都在这个指定域内,即在这个域内原方程可分解成若干个一次方程,那么可以断定原方程可根式解,否则就没有根式解.

用伽罗瓦基本定理可以判定,次数大于 4 的代数方程不可根式解.因为一个 $n(n>4)$次方程其 $n$ 个根组成的置换群的极大正规子群为$n!/2$ 阶的交错群,这个交错群仅有唯一一个正规子群即恒等置换,它对交错群的指标 $n!/2$ 在 $n>4$ 时不可能为素数,从而我们可再次获得阿贝尔已经证明过的高于四次的方程不可根式解的定理.

伽罗瓦的理论包含了相当深刻的思想,对此他充满信心,尽管当时一些有名望的数学家对他如何不理解.他在留给好友的遗言中就这样说:“你可以公开地请求雅可比或者高斯,不是对于这些定理的真实性,而是对于它们的重要性表示意见.在这以后,我希望有一些人将会发现把这堆东西注释出来对他们是有益的.”他还明确指出:他的工作不打算成为解方程的一个实际方法.

### 16.2.2 深邃的思想

伽罗瓦思想深受拉格朗日、高斯和阿贝尔思想的启发,但他又极大地改进了他们的思想,引入了许多全新的概念,打开了通向成功之门.

拉格朗日在《关于方程的代数解法的思考》中分析三、四次方程解法时就已经看到方程根的对称性的作用,明确指出根的排列有可能是解决问题的关键,拉格朗日用这一思想考察过三、四次方程根的特性,引入了"预解式"的概念,而他在分析中所应用的方法,实际上已涉及一个新的数学概念,即置换群的概念.

阿贝尔在他的工作中引入了另外两个新的数学概念:域和不可约多项式,阿贝尔不仅开创了"不可能性"证明的新的数学思想,而且第一个引入了数学结构的思想,"域"的概念就是最早的数学结构.

伽罗瓦在拉格朗日的基础上明确提出"置换群"的概念,还提出了"子群"、"正规子群"、"极大正规子群"等全新的数学概念,这些概念后来都发展为近世抽象代数学的基本概念.代数学从伽罗瓦时代起不再是以解方程作为主题,而是以这些全新的概念作为研究的对象.而且人们逐步发现,代数能够处理的不一定是以实数或复数为对象所组成的集合,只要满足一定的运算和运算律都可作为代数的研究对象.从此,数学研究的对象大大地扩展了,不仅可以研究现实的量,而且任意构造的量也可作为研究的对象.

伽罗瓦工作中的另一个重要特点是,在他的证明中完全用群论的方法进行了处理,这在他之前是绝对没有的.拉格朗日采用"预解式"希望把原方程转化为容易解的方程来处理,但未获成功,因为不仅构造预解式无定法,且得到的预解式可能比原方程还复杂,伽罗瓦尽管也用到预解式,但他是通过分析置换群及其子群的结构而获得的,且得到的预解式易于判定原方程的可解性.

伽罗瓦的这一思想具有重要的方法论意义,当一个问题难以

处理时，可将它置于一个整体结构之中来考虑，甚至可以将它置于另一个同构的数学结构中去考察. 如上述可解性的讨论，就是将解方程问题转化成讨论与系数域有关的代数结构——群的问题来研究的，这一思想方法在近代数学研究中广为应用.

## 16.3 代数结构思想的意义

在上面的讨论中我们已经扼要说明了代数结构思想的重要性，这一节中我们将用具体例子，从三个方面来说明代数结构思想的意义.

### 16.3.1 数学问题的否定解决

一个数学命题或者为真，或者为假，二者必居其一. 通常，要说明一个命题是真的，必须经过严格的证明，否则可举出反例说明其不成立. 要证明一个命题必定成立有时很困难，但要说明一个命题一定不成立有时可能更困难，因为反例的构造无章可循. 经典数学中常用归谬法证明某些不可能性，如欧几里得著作中就用此法证过$\sqrt{2}$为无理数、素数无限等命题. 阿贝尔通过引入抽象代数的概念，证得了一般高次方程无根式解，开辟了"不可能性"证明的新思路.

伽罗瓦则进一步把这种方法明晰化，形成一种可以操作的程式. 考察伽罗瓦处理方程问题的思想，可以发现，他在处理代数方程根的问题遇到阻碍时，就将它与系数域对应起来构作相应的置换群，把方程有无根式解的问题转化为对群的结构的分析，方程有根式解应对应怎样的群的结构，无根式解又该是怎样的结构，这样就把某个不可能性命题的证明，转变为对相应对象的性质分析，在某些情况下，这要比纯粹去构造反例容易把握.

伽罗瓦的这种思想在解决尺规作图问题中更加明确地得到了体现. 对于某个作图问题，只要将它归结到代数方程，接着考察相应的不可约因子，看此方程能否用平方根解出，这一事实可由伽罗

瓦理论表明:一方程能用平方根求解的充要条件是方程的伽罗瓦群的阶是 2 的方幂.由这个判别法可以证明:素数 $p$ 边的正多边形能用尺规作出的充要条件是 $p$ 具有 $2^{2^n}+1$ 的形式,由此可知当 $n=0,1,2,3,4$ 时,即 $p=3,5,7,257,65537$ 时,正 $p$ 边形可尺规作图;$n$ 大于 4 时,$p$ 不一定为素数,对于 $p=7,11,13,\cdots$ 等素数则不能尺规作正多边形,而高斯仅获得过前半部分可尺规作图的结论.

用同样的方法可以证明三等分任意角和倍立方体这两个著名的尺规作图问题都是不可解的,下面让我们较为通俗地讲述一下尺规作图三大难题的解决.

在平面几何中,自古流传下来的著名的尺规作图三大难题,其实质是这样的问题:能否通过有限次使用直尺和圆规实现:

(1)三等分任意角(三等分角);

(2)作一立方体使其体积为已知立方体的两倍(倍立方);

(3)作一正方形使其面积等于已知圆的面积(化圆为方).

因为直尺和圆规只能作直线和圆,由解析几何知直线和圆的方程只是一些一次、二次的代数方程,其解只可能是系数经过加、减、乘、除和开平方这五种运算的结果,即解中最多带有平方根.这样,由尺规可以作出的量的充要条件是给定量(即全体系数,且可作出)的加、减、乘、除和开平方.显然,尺规作图的关键是对于根式只能作出平方根来,按伽罗瓦理论,即扩域为二次的可以由尺规作出.我们首先来看三等分角问题,由恒等式

$$\cos\theta=4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$

取 $\theta=60°$,并令 $y=\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$,有

$$8y^3-6y-1=0.$$

容易证明这个方程在有理数域上是无解的;若这个方程在扩域上

有解的话,则该扩域一定是三次扩域,而不可能是二次扩域,所以60°角三等分是不可能用直尺、圆规经有限次作出的.这里我们并没有排除有的角可以尺规三等分,如90°.对于倍立方问题,取已知立方体边长为单位长,令 $x$ 为所求立方体的边长,则有 $x^3-2=0$,这也是一个在有理数域上无解的三次方程,它有解的扩域也是三次的,所以,这也是不可能用尺规作出的.至于化圆为方的问题,设 $r$ 为已知圆的半径,$x$ 为所求正方形的边长,则问题相当于解方程

$$x^2-\pi r^2=0.$$

这倒是一个二次方程,问题是若 $r$ 为任意数,则 $\pi r^2$ 就不是一个代数数,因为 $\pi$ 经德国数学家林德曼证明是一个超越数,这样方程系数 $\pi r^2$ 本身是不能用尺规作出的,从而化圆为方问题也是不能用尺规作出的.几千年来,使每一个数学家都难堪的"三大作图难题",作为伽罗瓦理论的副产品,如此干脆地解决了,仅此一点,人们就可以感到伽罗瓦的伟大了.

### 16.3.2 研究对象的整体处理

阿贝尔和伽罗瓦引入的域与群的概念,都是常见的代数结构,而且群是最基本的结构,域可以由它生成,阿贝尔和伽罗瓦的成果开创了用结构思想处理问题的新方法,成为现代数学常用的处理问题的方法.例如在拓扑空间中,可将一个 $n$ 维流形通过同胚映射将它映射成一个局部欧氏空间,欧氏空间属于比较容易处理的一种结构.

代数结构思想的重要性不是在伽罗瓦以后马上被认识到的.到19世纪末,数学家们才认识到,对许多不相联系的代数抽出它们共同的内容来进行综合的研究,可以提高效率到一个新的水平.把群与几何联系在一起研究,可以用"群"来统一几何学.在伽罗瓦逝世40年后的1872年,年方23岁的青年数学家克莱茵(Felix Klein,1849～1925年)在爱尔朗根大学所作的教授任职演讲中,报

告了自己用群论对几何学进行研究的情况.由于它是那样有名,被人们称为爱尔朗根纲领.这个纲领指出,现存的几何学都可以用群以予分类,可以用群给几何学以统一的定义.因为它恰好出现在群论几乎渗透到各个领域的时候,因而使许多数学家开始感到:连堪称数学核心学科的几何学都能被群论统一起来,那么全部数学的联系纽带只能是群,而不是什么其他东西.年轻的克莱茵认为,欧氏几何与非欧几何的区别不只是度量和非度量性质的区别,从更广泛的观点来看,可以基于这些几何所要确定的目标是用什么来刻画的,在克莱茵看来,每种几何都可由变换群来刻画,所要做的就是考虑这个群的不变量的性质.例如平面上的欧氏度量几何是研究在平移、旋转、反射组成的变换下不变量的性质,这些平移、旋转和反射组成一个变换群.若将这个变换群增添位似变换,则在这个扩大的群下,像长度、面积、全等这类度量性质就不再保持不变了,这时的几何称为平面相似几何.由这个观点,所有现存几何都可归入射影几何之中,因为它们的变换群都是射影几何变换群的子群.克莱茵用的变换群与伽罗瓦群很相似,其差别不过是克莱茵的群用在无限集合上,而伽罗瓦群仅使用在 $n$ 元代数方程所决定的有限集合上罢了.

这种从整体上对研究对象进行处理的方法,是现代数学的一大特点.正如崇尚结构主义的法国布尔巴基学派的主要成员迪多内所说,对研究对象"深刻的理解往往是将这些对象放在比较广阔的范围内时产生的".现代公理化方法实际上也是由代数结构思想发展而来的.

### 16.3.3 抽象概念的现实应用

群的产生与发展,与非欧几何一样,其动力不是来自现实世界,而是数学发展自身的需要,它不是对真实事物的直接抽象,而是适应数学发展需要,对数学概念的再抽象,这种抽象概念往往远离现实世界,从而也难以被接受.群的概念与方法也经过了很长时

间才被接受，但真正显示其重要性的，还是它在现实中的应用.

法国物理学家、矿物学家布拉维(1811 ~ 1863)，研究了运动群，确定出自然结晶体的结构总共可能有 32 种分子结构. 1890 年俄国著名的结晶学家及几何学家费德洛夫用群论的方法解决了结晶学的基本任务之一，即规则的空间点系的分类问题，导出了空间费德洛夫群的数目总共为 230 个. 这些应用对群论的发展起了很大作用，以至于很多数学家都特别宠爱群这个概念，克莱因特别偏爱它，因为他认为群会把数学统一起来；庞加莱干脆热情地宣称，群论就是那摒弃其内容而化为纯粹形式的整个数学. 群概念无论在理论上还是实践中都成了极为重要的思想与方法.

阿贝尔和伽罗瓦开创的事业是代数学乃至整个数学发展史上的一个里程碑，它与非欧几何一起，就像两块敲门砖，敲开了现代数学的大门.

# 17 几何学的革命

"三角形的内角和小于两直角";"存在一个三角形,它没有外接圆";"在角的内部存在直线,它不通过角的顶点,而且与角的两边都不相交".从欧氏几何的观点看,这些无疑都是"异端邪说",然而,正是这些"异端邪说",引出了数学中的重要分支——非欧几里得几何.

19世纪非欧几何的诞生,引起了数学概念、数学思想和数学方法等方面革命性的变化,它从根本上改变了人们对数学的性质及其与物质世界的关系的理解,打破了2000多年的形而上学的时空观,导致了自然科学与哲学中若干重大原则的变革,影响着现代自然科学、现代数学和数学哲学的发展.

## 17.1 关于第五公设的思考

如所知,二千多年前,欧几里得将前人积累的丰富的资料以及他自己的发现,加以系统而严密的整理,给出了几何系统的第一个逻辑结构,写下了人类历史上的光辉巨著《几何原本》.他在《几何原本》第一卷给出了五个公设,其中前四个公设人们认为简单明了,符合亚里士多德公理"自明性"的要求,唯独第五公设即所谓"平行公设":"若两直线和第三直线相交且在同一侧所成的两个同侧内角之和小于两直角,则这两直线无限延长后必相交于该侧的一点."不仅文字啰嗦,而且所肯定的事实也不明显,欧几里得本人对这一公设也不太满意.《几何原本》的第一卷共48个命题,其中

前 28 个命题的证明,欧几里得都回避了第五公设,只有在第 29 个命题的证明中不得不用了一次,这也是《几何原本》用第五公设的唯一的一次.因此,可以认为,第五公设问题首先被欧几里得本人提了出来.

自欧几里得以来,人们总想去掉这个公设,试图通过其他的公设和公理予以证明.此后无数的数学家都曾尝试过证明第五公设,并付出了辛勤的劳动.许多数学家曾经宣告"证明"了第五公设,但这些"证明"后来或是自己或是被别人发现了毛病——用了第五公设的等价命题.

在直接证明均告失败后,人们逐渐把注意力转移到用间接证法来证明第五公设.意大利的萨开里(G. Saccheri, 1667 ~ 1733)是第一个试图用反证法证明第五公设,且影响较大的一位.如图 17-1,他考虑满足下述条件的四边形 $ABCD$: $\angle A=\angle B=90°$, $AD=BC$.过 $AB$ 之中点 $E$ 作 $EF\perp AB$.由于对称关系,他很快证得了 $\angle C=\angle D$.怎样证明 $\angle C$ 为直角呢?他作了三种假设: $\angle C>90°$; $\angle C<90°$; $\angle C=90°$.只要否定了前两种情况,那么 $\angle C$ 为直角就证明了.

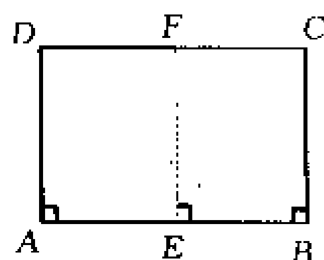


图 17—1

萨开里从 $\angle C>90°$ 出发,很快引出矛盾.但当从 $\angle C<90°$ 出发时,却得出了许多有趣的推论,其中有:在平面上存在两条直线 $l_1$ 和 $l_2$,它们在一个方向无限地互相接近,而在其相反的方向上无限地分开,这样, $l_1$ 和 $l_2$ 将在无限远点 $P_\infty$ 有共同的垂线 $l$.他说,这显然是不可能的,是"矛盾",因此,他认为证明了第五公设.

萨开里的错误在于把有限图形的性质扩大到无限图形,以为在有限远处不成立的东西在无限远处也不成立.他所发现的矛盾只是同常识、经验、情理矛盾,即同欧几里得几何中的相应命题矛

盾,而不是反证法所需要的逻辑矛盾.由于他过于崇尚第五公设的绝对正确,以至于走到伟大发现的门前而却步.

德国数学家兰伯特(Lambert,1728~1777)所走的道路与萨开里极为相似.他考虑一个四边形,其三个角均为直角,对第四个角,兰伯特作出:(1)直角假设;(2)钝角假设;(3)锐角假设.与萨开里一样,兰伯特很快将钝角引向矛盾,兰伯特由锐角出发并未发现任何矛盾.但他注意到钝角假设导出的定理恰好和球面上图形的定理一样,由此他猜想由锐角假设得出的定理可以应用于虚半球面的图形.可见,兰伯特已认识到一组假设如果不导致矛盾的话,一定可以提供一种可能的几何.他的工作实际上为非欧几何的诞生奠定了基础.

与罗巴切夫斯基同时代的普鲁士法学教授施魏卡特(F.K. Schwevkart,1780~1859)1816年写了一份备忘录,认为应该承认存在着两类几何:欧氏几何与假设三角形内角之和不足两直角的几何.这后一种几何他称为星空几何,因为它可能在星空内成立.在施魏卡特的指导下,他的外甥托里努斯(F.A. Taurinus,1794~1874)继续研究星空几何,并得出的结论说,只有欧氏几何对物质空间是正确的,而星空几何只是逻辑上相容.施魏卡特和托里努斯都踏进了非欧几何的大门,但由于他们不能对这种几何的广阔前景和现实应用作出合理的联想,终于在中途退了出来,在无人支持的困境中,放弃了对星空几何的研究.

## 17.2 高斯、波尔约和罗巴切夫斯基的突破性工作

众多数学家对第五公设的研究,在思想上、材料上为非欧几何的问世作了充分的准备.只持富有高度科学想象力的数学家为它迈出决定性的一步.而这决定性的一步,归功于高斯、波尔约和罗巴切夫斯基三人.

伟大的德国数学家、天文学家和物理学家高斯(Carl Friedrich

Gauss, 1777～1855)出生于一个贫困的瓦工家庭,受一位公爵的帮助而完成学业,从哥廷根大学毕业后任该校教授. 高斯一生在数论、代数学、微分几何、超几何级数、复变函数论以及椭圆函数等方面均有开创性成就,是屹立于18、19世纪的数学巨匠,被称为"数学家之王",是继牛顿之后的最大的数学家,19世纪上半期世界数学界之最高权威.

关于高斯的童年,有着许多令人惊讶的故事. 传说他在3岁时,就能纠正父亲记账中的错误,这就使得他的父亲决定勒紧裤带送他上小学. 高斯10岁在小学时就已掌握等差数列的求和方法,正确地计算出 $1+2+3+\cdots+100$ 的和,要知道这种方法在当时要到大学里才能学到. 因此,他受到数学教师的青睐,老师自己掏钱买来了当时最好的算术书让他自学,因为这位老师自己也感叹:"他已经超过我了,我已经没有什么可教他的了."

作为一个数学家,高斯毫无例外地曾经试图证明第五公设. 早在1792年,即他15岁时,就思考过第五公设问题. 1794年,高斯已发现非欧几何中的一个事实:四边形的面积与360°与四个内角和的差成正比. 从1799年起,他着手建立这一新几何的内容,1813年已形成比较完整的思想. 开始他把这种几何称为"反欧几何",后称"星空几何",最后定名为"非欧几何". 1824年他在回答托里努斯的信中说:"三角形内角和小于两直角,这个假设引导到特殊的与我们的几何完全不同的几何,这个几何完全是一贯的,并且我发现它本身完全令人满意."他不仅深信新几何在逻辑上的相容性,而且还确认它具有可应用性. 可惜他并没有发表他这一开创性的见解,其原因主要有两方面:其一,用他自己的话说"怕黄蜂围绕耳朵乱飞",也就是怕惹起不必要的麻烦,受人嘲笑;其二,高斯一生过于谨慎,他恪守的原则是:"问题在思想上没有弄清之前决不动笔."只有在证明的严密性和文字叙述的简明性方面都达到无懈可击时才肯发表. 因此,他公开发表的成果只是他整个工作的极少部

分.

罗巴切夫斯基(Побаувский Николай Иванович, 1793～1856)出身于小技术员家庭,三岁丧父,自幼家贫.1807年人喀山大学,1810年获硕士学位,1814年任该校副教授,1816年任教授,1827～1846年任校长.他从1815年开始研究第五公设问题.他起初也想直接证明,但很快就吸取了历史的教训,意识到这样的证明是不可能的,并由此断定可能存在另一种几何.1823年他用如下命题代替第五公设:“过已知线外一点至少可作两条直线和已知直线不相交”做为基础,然后进行严格的逻辑推理,当他将这种推理进行下去,看到一个日益膨胀的“怪胎”(由于它与欧几里得几何的定理表面差异极大,令人觉其荒谬)的时候,他并未像前人那样因没找到预期的矛盾面惶恐不安,而是冷静地把这些所得到的几乎与欧几里得《几何原本》同等容量的逻辑命题体系,看成是世人罕见的“奇异果实”.于是发展出与欧氏几何不同的一种新的几何,这种几何是相容的,它的论证之严谨并不亚于欧氏几何.1826年2月12日,他在喀山大学的数学物理系的学术讨论会上作了题为《关于几何原理的扼要叙述及平行线定理的一个严格证明》的报告.1829年罗氏在非欧几何方面的成果《几何学原理》第一次公开发表在《喀山通报》杂志上,以后他又不断地给出对非欧几何的研究成果.由于还没有找到这种几何的实际应用,所以他把这种几何称为“虚几何学”或“想象几何学”,后又改称为“泛几何”,晚年,双目失明的罗巴切夫斯基还以口述的方式写下他的最后著作《泛几何学》(1855年),对非欧几何给出了全新的说明.

高斯大学时代的同学、匈牙利的伏尔夫刚·波尔约,曾经从事第五公设的证明,因为没有在这方面作出突出的成就,自认为浪费了一段时间.然面,他的儿子约翰·波尔约(John Bolyai, 1802～1860)对这一问题着了迷,当他知道儿子在研究第五公设问题,赶紧写信劝阻,信上说:“希望你放弃这个问题.对这样一个问题的害

怕应该更多于感情上的迷恋，它会剥夺你生活中的一切时间、健康、休息和一切幸福.”父亲的规劝并没有影响儿子的兴趣，正当父亲为儿子从事“无效劳动”而担忧的时候，儿子却有了新的发现. 1823 年 11 月 23 日，21 岁的约翰·波尔约写信给父亲说“我已从乌有中创造了整个世界.”1823 年，父亲把儿子的成果——一篇 26 页的论文《关于一个与欧几里得平行公设无关的空间的绝对真实性的学说》，作为附录附在自己出版的几何著作之末，并把该书寄给高斯，请高斯评价. 高斯回信说：“如果我一开始便说我不能称赞约翰的工作，那你一定感到奇怪. 但是我确实不能说别的话，因为称赞他等于称赞我自己. 你的儿子所采用的方法和他所达到的结果几乎全部和我自己在 30 年前已开始的个人沉思相符合. ……我自己的著作，虽然写好的仅是一小部分，我本来永远不愿意发表，……现在有了老友的儿子能够把它写下来，免得它与我一同湮殁，那是我最高兴的了.”高斯的回信使约翰·波尔约感到失望，他不肯相信有人在他之前已做了同样的工作，当他第一次看到罗巴切夫斯基 1835 年的著作时，也以为那是抄自他 1832 年出版的附录.

## 17.3 非欧几何学

通常所说的非欧几何学，主要指双曲几何学和椭圆几何学. 下面以双曲几何学为例，对非欧几何学作一简单介绍.

在欧氏公理体系中，若用双曲平行公理：“对于任何直线 $a$ 和不在 $a$ 上的任何一点 $A$，在由 $a$ 和 $A$ 确定的平面上，通过 $A$ 至少有两条直线与 $a$ 不相交”代替欧氏的第五公设即平行公设，就可以得到双曲几何的一批结果（即双曲平行公理的等价命题）. 主要有：

(1)在平面内，对于一条直线，存在不相交的垂线和斜线.

(2)存在一个三角形，它没有外接圆.

(3)存在一个三角形，它的三条高不相交.

(4)三角形的内角和小于两直角.

(5)三角形的内角和不是常数.

(6)不存在矩形.

(7)平面上不在已知直线上且与此直线等距离的三个点,不在同一直线上.

(8)在同一平面上的任何两条直线,一条直线上的点到另一条直线上的距离是无界的.

(9)如果两个三角形的对应角相等,那么这两个三角形全等(所以不存在相似形).

(10)在角的内部存在直线,它不通过角的顶点,而且与角的两边都不相交(如图 17-2).

(11)三角形 $ABC$ 的面积和它的角亏 $\delta=\pi-(A+B+C)$ 成正比.

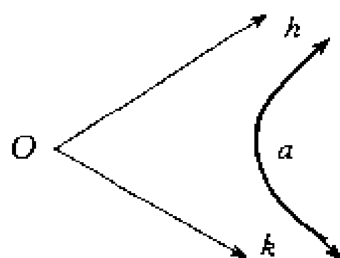



图 17—2

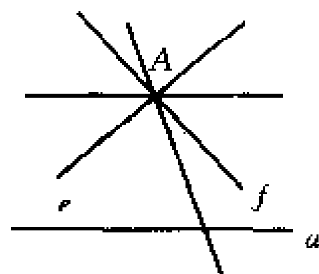



图 17—3

在双曲几何中,两条直线的位置关系如下(如图 17-3):

设 $A$ 是直线 $a$ 外一点,根据双曲平行公理,在 $A$ 和 $a$ 确定的平面内,经过 $A$ 至少有两条直线与 $a$ 不相交.那么,我们就可以证明,经过 $A$ 的两条直线 $c,d$,若它们与 $a$ 分别交于 $C,D$,则过 $A$ 且落在 $\angle CAD$ 内的直线必与 $a$ 相交;反之,若 $c,d$ 与 $a$ 都不相交,那么 $c,d$ 所确定的不含 $a$ 的那对对顶角内,过 $A$ 且落在这对对顶角内的直线都与 $a$ 不相交,这样,过 $A$ 的所有直线分成两类,它们有两条分界线 $e$ 和 $f$,在 $e,f$ 决定的一对对顶角内的直线都与 $a$ 相交,而在另一对对顶角内的都与 $a$ 不相交($e,f$ 也与 $a$ 不相交),直线 $e,f$ 就称为 $a$ 的双曲平行线(分别在 $a$ 的两个方向上与

$a$ 平行);其他与 $a$ 不相交直线称为 $a$ 的分散线;相交直线称为会聚线.

还可以证明,与同一直线在同一方向下平行的两条直线互相平行;共面的两条直线互为分散线当且仅当它们有一条公垂线.

然而,双曲几何与我们习惯的作为欧氏空间的现实空间很不协调.双曲几何是否有现实意义?它的公理系有没有矛盾?开始,罗巴切夫斯基将这种几何学称为"想象中的几何学","虚几何学",但如前所引的第 11 个命题所表示的,三角形越小,它的内角和越接近于两直角,因此与欧氏几何的性质越接近,那么,作为整个宇宙空间是否可能更接近于双曲几何?高斯和罗巴切夫斯基都考虑过此问题.1868 年意大利数学家培尔特拉米在拟球面上实现了双曲几何平面的片段;1870 年德国数学家 F. 克莱因在射影空间中实现了双曲几何的公理系;紧接着法国的庞加莱又在欧氏空间里实现了双曲几何,从而解决了双曲几何公理的相容性,使双曲几何有了现实意义.下面,我们简单介绍一下双曲平面的庞加莱模型:

首先规定基本元素,在欧氏平面上取定直线 $u$,以 $u$ 为边界的一个半平面 $\lambda$(不包括 $u$)就是所要讨论的整个"双曲平面",$\lambda$ 上的点作为"双曲点";$\lambda$ 内顶点是 $u$ 上且与 $u$ 垂直的射线,以及中心在 $u$ 上的半圆圆作为"双曲直线"(如图 17－4 中的 $P,Q$ 及 $a,b,c,d$).

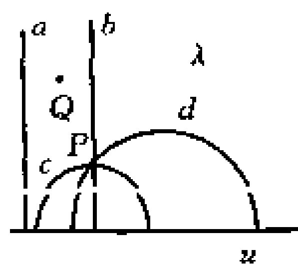


图 17—4

其次规定基本关系,"点"在"直线"上就表示点在相应的射线或半圆周上;"直线"上的"点"的"顺序关系"反映为相应的射线或半圆圆上点的顺序关系;"图形"$A$ 和 $A'$ 是"合同"的,反映为若经过有限次"轴对称"将 $A$ 变为 $A'$,这里的"轴对称"反映为欧氏平面上关于相应的射线的轴对称或关于相应圆的反演.

根据以上规定,我们就可以验证相应的双曲公理.

## 17.4 黎曼的贡献与非欧几何的发展

非欧几何的创立,违反了人们传统的认识,超越了时代,因而被冷落了近30年.令人遗憾的是,三位创始人在世时都没有看到非欧几何被公认,更没有看到这一几何给数学思想产生的深刻影响.直到19世纪中期,黎曼才在这一工作的基础上作出了重要的突破.

黎曼(Georb Bernhard Riemann,1826～1866)1846年入哥廷根大学读神学和哲学,后来转学数学,1851年获博士学位,1857年升副教授,1859年狄利克雷去世而继任其教授职位.他是高斯和韦伯的学生.他短暂的一生写出了许多有名的论文,对数学的发展作出了重要的贡献,影响了19世纪后半期数学的发展,黎曼几何仅是他的成就之一.

在欧氏几何中,过已知直线外一点,有且只有一条直线与已知直线不相交,在罗氏几何中,则至少有两条直线与已知直线不相交,那么是否存在一种几何体系,过已知直线外一点,没有与已知直线不相交的直线? 1854年,黎曼在哥廷根大学作了题为《论作为几何基础的假设》的报告,提出了黎曼几何的思想,这个报告于1868年出版.报告认为几何学所研究的对象是一种"多重广延量",其中的点可以用几个实数作为坐标来描述.为用抽象空间描述自然现象奠定了基础.他认为非欧几何不仅仅是一种,而是一个广大而又丰富的领域,为了定义黎曼空间,黎曼推广了曲面的高斯曲率,建立起黎曼空间曲率概念,这个概念是刻画欧氏空间和各种非欧空间之间差异的量度.

在一般的黎曼空间中,空间每一点的曲率是不同的,即黎曼空间是不均匀的.在特殊的情况下黎曼空间可以是均匀的,即具有恒常的曲率.恒常曲率的空间有三种类型:

(1)零曲率空间,即欧氏空间;

(2)负曲率空间,即罗氏空间;

(3)正曲率空间,即狭义的黎曼空间.

这样,欧氏几何和罗氏几何都成为更一般的黎曼几何的特例了.黎曼在报告中所阐述的几何思想极为深刻,是继高斯和罗巴切夫斯基之后几何思想的又一次突破.

继黎曼之后,又有许多数学家为非欧几何的发展作出了重大贡献,特别是1915年,A.爱因斯坦所创立的广义相对论真正地用到了黎曼几何.20世纪以来,受相对论的影响和推动,黎曼几何又有了新发展,产生了以更一般的曲线长度积分为基础的芬斯勒空间,以超曲面的面积分为基础的嘉当空间,以二阶微分方程为基础的道路空间,还有K展空间等等.

非欧几何的产生与发展,在客观上对研究了2000多年的第五公设作了总结,它引起了人们对数学本质的深入探讨,影响着现代自然科学、现代数学和数学哲学的发展.

其一,随着非欧几何的产生,引起了数学家们对几何基础的研究,从而从根本上改变了人们的几何观念,扩大了几何学的研究对象,使几何学的研究对象由图形的性质进入到抽象空间,即更一般的空间形式,使几何的发展进入了一个以抽象为特征的崭新阶段.可以说,非欧几何的产生是数学以直观为基础的时代进入以理性为基础的时代的重要标志.

其二,非欧几何的产生,引起了一些重要数学分支的产生.数学家们围绕着几何的基础问题、几何的真实性问题或者说几何的应用可靠性问题等的讨论,在完善数学基础的过程中,相继出现了一些新的数学分支如数的概念、分析基础、数学基础、数理逻辑等,公理化方法也获得进一步的完善.

其三,非欧几何学的创立,为爱因斯坦发展广义相对论提供了思想基础和有力工具,而相对论给物理学带来了一场深刻的革命,

动摇了牛顿力学在物理学中的统治地位,使人们对客观世界的认识产生了质的飞跃.

其四,非欧几何学使数学哲学的研究进入了一个崭新的历史时期.18世纪和19世纪前半期最具影响的康德哲学,它的自然科学基础支柱之一是欧几里得空间.康德曾说:"欧几里得几何是人类心灵内在固有的,因而对于'现实'空间客观上是合理的."非欧几何的创立,以冲破传统观念并破除千百年来的思想习惯,对数学的绝对真理观点刮来一场暴风,给康德的唯心主义哲学以有力一击,使数学从传统的形而上学的束缚下解放出来,用康托尔的话说"数学的本质在于其自由."

# 18 数学猜想与数论

数学是一门抽象的学科，它的概念是那样的抽象，它的方法是那样的奇妙，以至即使是数学家，也只能熟悉某一个或某几个数学分支，而对其它数学分支则往往感到茫然不知所云．但是，这仅仅是数学所表现出的一个侧面．实际上，在数学学科的发生与发展过程中，在使用严谨抽象方法的同时，也大量地使用着类比、归纳等不太严谨的方法，与大量严格论证的理论相伴，也存在着许多没被严格论证的猜想与假设，它们共同推动着数学的发展．这一现象在数论这一分支中尤为突出．

## 18.1 费尔马猜想——会下金蛋的母鸡

故事可追溯到遥远的古代．公元前 500 年左右，在古希腊有一个称为毕达哥拉斯学派的集宗教、科学和哲学为一体的神秘组织．该组织认为宇宙间的万物可以被和谐地表示为整数或整数之比，这就使得该组织对整数问题进行了较为深入的研究，并且取得了许多重要的成果，其中据说关于直角三角形的勾股定理在西方就是由这个学派首先发现的．由于这个学派的所有成果都要归功于这个学派的创始人与首领毕达哥拉斯，故这个定理又称毕达哥拉斯定理．根据这个定理，能求出可排成直角三角形三条边的三元整数组，即满足 $x^2+y^2=z^2$ 的三元数组 $(x,y,z)$，我们习惯称这种数为毕达哥拉斯数或勾股数．

最初，毕达哥拉斯给出的法则，实际上只能给出一部分这样的

三元数组,后经过许多数学家的研究,这个问题才得到完美的解决.关于寻找毕达哥拉斯数(即勾股数)的方法之一是取

$$x=2uv,\ y=u^2-v^2,\ z=u^2+v^2,$$

$u,v$ 为无公因子的自然数,其中一个为奇数,一个为偶数,例如 $u=2,v=1$,则有(3,4,5)为一组勾股数.

按照这一公式,求出的是原始的毕达哥拉斯数,也就是说这三个数没有大于1的公因子,从任一组原始三元数出发,都可以得到无限多组三元数,因为只须将原始的三元数组中的每个数同时乘某个整数即可.

公元250年左右,生活在亚历山大的希腊人丢番图,在他的巨著《算术》的第二卷的第8个问题纪录了毕达哥拉斯的有关结论:"将一个平方数分为二个平方数".这本书的流传很广.1637年,被称为17世纪最伟大的数学家之一的法国数学家费尔马读这本书时,在这个问题的旁边写道:"除此外,一个立方数不能分拆成两个立方数;一个四次方数不能分拆成两个四次方数,一般地说,任何次数大于二的高次方数都不可能分拆成两个幂次相同的数.我已经找到这一定理的绝妙证明,可惜这里空白太狭小,写不下."用现代数学术语说就是"$x^n+y^n=z^n$ 当 $n>2$ 时无整数解."这一段简单的注解,像法国大革命在近代史中非常闻名一样,在数学发展史中引起久久不能平息的巨大反响,这就是著名的费尔马大定理或费尔马猜想.

费尔马生性谦和,一生很少发表论文,他的许多创建性的数学概念、定理、方法都是写在所看过的书籍的边缘和空白处,以及与朋友们的通信中.他几乎与当时所有的一流的数学家都有书信往来,他与这些数学家讨论了当时数学的发展,做出了许多奠基性的贡献.他的这种研究习惯为他去世后的论文集汇编带来了很大的困难,为了使人们较清楚地了解他的一些思想和贡献,他的儿子只好将他看过的著作和他在这些著作上所作的注解一同发表.

费尔马一生嗜好数论,他改变了前人用几何观点来研究数论的方法,他对数论有着非凡的直觉和研究能力,他一连提出了十几个数论上的猜想,虽然自己没能证明这些猜想,并且猜想中还有个别是错误的,但对这些猜想的研究却决定了此后近 200 年数论研究的方向.

由于这些猜想较容易看懂,不妨略举几例如下:

(1)“若 $p$ 是一个素数,并且 $a$ 与 $p$ 互素,则 $a^p-a$ 被 $p$ 整除.”例如 $p=3,a=2$,则 $a^p-a=2^3-2=6$,能被 3 整除.这个猜想被称为“费尔马小定理”,是费尔马 1640 年给朋友德贝西的信中提出的,第一个正确的证明是近百年后欧拉于 1736 年给出的.

(2)“一个形如 $4n+1$ 的素数可以表成两个平方数的和.”如 $13=9+4,17=16+1,29=25+4$ 等等,这个猜想是费尔马于 1640 年给朋友梅森的信中提出的,1754 年欧拉首先证明了它.

(3)“每一个非负整数可以表成不大于四个平方数的和.”这个猜想于 1770 年为拉格朗日首先证明.

(4)“整数边的直角三角形的面积不能是一个平方数.”这个猜想也是由拉格朗日证明的.

(5)“对所有非负数 $n$, $f(n)=2^{2^n}+1$ 是一个素数.”这个猜想被欧拉证明是错误的.

像费尔马提出的这些猜想,用一些具体数值代入验证,往往都是正确的,但是真正要证明或推翻又是那样困难.几乎所有的 17、18 世纪的数学家都涉及了证明这些猜想的工作.到了 19 世纪初期,除了费尔马大定理之外的其他所有费尔马猜想均已被解决.这就使其又有了另一个“雅号”“费尔马最后定理”(Fermat’ Last Theorem).对于费尔马大定理,据说费尔马本人曾用无穷下推法证明了当 $n=4$ 时猜想成立.欧拉证明了 $n=3$ 时猜想成立,不过欧拉的这个证明不很完全,后又被人完善.1825 年,勒让德与狄利克雷证明了 $n=5$ 时猜想成立;1839 年拉美证明了 $n=7$ 时猜想

成立.1843年,德国数学家库默尔认为自己给出了完整的证明,后经狄利克雷审查,发现证明中使用了个未加证明的假设.尽管库默尔没能证明这个猜想,但对于证明中利用的假设的研究,导致了一门新的分支——代数数论的诞生.

为了激励人们解决这一难题,1908年法国数学家沃尔夫斯克尔给哥廷根科学院留下了十万马克,作为第一个给出费尔马大定理的完整证明的人的奖金.此后,提出的证明蜂拥蝶至,但与当初化圆为方和三等分角等问题一样,所提出的证明都是错误的.直到1993年美国数学家Wiles才宣布费尔马大定理得到证明！其基本思想是证明有理数域上有无穷多条模椭圆曲线,从而蕴含了费尔马大定理.

对费尔马大定理及费尔马其它猜想的研究,引来了大批专业和业余研究人员,他们的研究推动了数论这一古老的数学分支的发展.例如库默尔的研究产生了代数数论等,这些成绩早已远远超过费尔马大定理问题本身的价值,这可能是猜想的提出者——费尔马始料未及的！猜想的这种连锁式的作用,对数学发展是极为有利的.对此,20世纪最伟大的数学家希尔伯特(David Hilbert,1861～1943)在回答别人的提问时说,他不愿解决费尔马大定理的证明,因为这是“一只会下金蛋的母鸡！”对于希尔伯特是否真的证明了费尔马大定理,我们无法考证,然而这个比喻,倒是很好地形容了猜想在数学发展中的作用.

由于猜想对数学学科发展的作用,很有必要对数学猜想本身作进一步的探讨.所谓数学猜想,是以一定数学事实为基础,提出的一些尚未得到证实的数学命题.一个良好的数学猜想,可以对数学的发展起到推动作用,但也不是任何人随心所欲地提出一个数学命题,就可以算作数学猜想的.首先,这是因为数学猜想是根据已知的数学知识和数学事实,对未知的数学概念和规律所作出的假定性说明,因此,数学猜想的第一个显著特征是以一定的数学事

实为根据的.如上面提到的费尔马大定理就是如此,当 $x^2+y^2=z^2$ 有无限多组整数解的理论得到证实后,人们很自然就会问 $x^3+y^3=z^3$, $x^4+y^4=z^4$,一般地 $x^n+y^n=z^n$ 在 $n>2$ 时有无整数解呢? 这是一个用以往的数学知识无法回答的问题.费尔马根据一些具体的如 $x^4+y^4=z^4$ 无整数解的数学事实,大胆地提出了费尔马大定理.其次,数学猜想的另一个显著特征是具有假定性或猜测性,因为它们通常是应用类比、归纳的方法提出的,或是在灵感、直觉中闪现出来的,除了完全归纳外,靠这些方法得出的结论既可能是真的,也可能是假的.例如,数论中著名的哥德巴赫猜想:“任何一个大于 2 的偶数,都是两个素数之和.”就是德国驻俄国公使哥德巴赫在进行了如下不完全归纳

$4=1+3$ (两个素数之和)

$6=3+3$ (两个素数之和)

$8=3+5$ (两个素数之和)

$10=5+5$ (两个素数之和)

$12=5+7$ (两个素数之和)

……

于 1742 年向当时的大数学家欧拉提出的.关于这一猜想的研究已取得许多重要的进展,到目前为止,最好的结果是由我国数学家陈景润给出的.1966 年,他给出了“1+2”的结果,即:对于任一大偶数 $N$,总可以找到奇素数 $p'$, $p''$ 或 $p_1$, $p_2$, $p_3$;使得下列两式至少有一个成立. $N=p'+p''$; $N=p_1+p_2p_3$,这一成绩被称为“陈氏定理.”必须指出,在其没有被完全证明之前,哥德巴赫猜想还有可能是一个假命题!

这就是说,在数学学科中,数学猜想要发展成科学理论必须经过严格的论证和实践的验证.这样一来,可能有一些数学猜想会被推翻,如上述费尔马关于

$$f(n)=2^{2^n}+1$$

是素数的猜想因为找到了 $f(5)=2^{2^5}+1=6700417\times641$ 是一个合数而被推翻了,而一些猜想由于被证实而上升为科学的数学理论,如费尔马小定理等.

## 18.2 筛法——神奇的数学之网

由于费尔马及其他许多数学家在数论领域中开创性的工作,推动了这门学科的迅速发展.对于业余的数学爱好者来讲,数论或许是最值得研究的一门学科了.其原因是多方面的.首先数论是一门将远古时代人类的思想与生活在原子时代的人们的思想融会贯通的数学分支,其中的许多问题起源于公元前,而它们的解决却像一根环环相扣的链条延续到现今,如生活在公元前三、四世纪之交的欧几里得的《几何原本》中使用的概念和方法仍在现今数论,特别是初等数论的研究中效仿和使用;其次数论是一门雅俗共赏的数学分支,对于一般人来说,也许他看不懂这些理论的推导,但他对于这些结论的含意却是能理解的,这样,它不仅对专业学者而且对业余爱好者也有着非凡的吸引力;再者,在数论中还存在着许许多多没有解决的问题,至今,其猜想之多可能是所有数学分支中独一无二的.这些问题既可以从数值上找到大量的证据,说明其合理性,但是其真实性又似乎并不是那样可不证自明的,这些神秘有趣的问题不断地向爱好它的人们招手,为他们留下了施展聪明才智的广阔天地.

在数论的研究中很重要的一个问题是研究素数的个数问题.所谓素数,就是指那些只能写成1和自身相乘形式的自然数,如 $2=1\times2,3=1\times3,5=1\times5$ 等等,否则称为合数,如 $4=2\times2=1\times4$.数论既然是研究数的,就有一个怎样给出素数,最好是所有素数的问题.对于这个问题,最早做出贡献的是公元前3世纪的亚历山大数学家厄拉多塞(Eratosthews),他设计了后来被称为"筛法"的方法,用它可以将正整数表中的合数筛掉,最后留下素数.具

体作法是这样的：在正整数表中，第一步划去 1，并从 2 开始，每隔一个数划去第二个数，这样划去的都是大于 2 的偶数，它们显然不是素数；第二步从紧邻近 2 的没被划去的 3 开始，每隔二个数划去第三个数，这样划去的都是 3 的倍数，也不是素数；第三步，从紧邻近 3 的未被划去的数 5 开始，每隔四个数，划去第五个数，这样划去的都是 5 的倍数，也不是素数，如此等等．只需经过这三步，我们就可以得到在 30 以内乘下的一列素数

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29.$$

利用厄拉多基"筛法"可以将某一个数以内的所有素数找出来，例如在 1 000 000 000 以内，共有 50 847 478 个素数．找出素数后，人们又发现，在 2 到 7 这六个数中，有三分之二的数是素数；在 2 到 13 这十二个数中，有二分之一是素数；在 2 到 97 这 96 个数中，有四分之一为素数．显然，由于一个数越在后面，它前面就会有更多的数可能为它的约数，于是这个数为合数的可能性就越大，这说明，愈到整数表的后面素数的分布愈稀，这样自然地就有一个猜想，在整数表中的某一个数之后就没有素数了．

欧几里得证明了这个猜想是错误的，他严格地证明了"存在无限多个素数"．他所用的方法是反证法：设 $m$ 为整数表中的最后一个（当然也是最大的）素数，则将 $m$ 与排在其前面的所有素数相乘后再加上 1，得整数

$$N=2\times3\times5\times7\times\cdots\times m+1.$$

由于 $N>m$，故 $N$ 是合数，因为 2 到 $m$ 的所有素数都不是 $N$ 的约数，则 $N$ 必存在一个比 $m$ 大的质因数，而这是不可能的，这就说明了无最大的素数，因此素数有无限多个．

接着人们又试图给出素数的表达式 $f(n)$，但从未成功．如有人曾给出 $f(n)=n^2-n+41$，结果，当 $n=1,2,\cdots,40$ 时都为素数，而当 $n=41$ 时，$f(41)=41^2$ 却为一个合数．费尔马同样也研究过这个问题，他猜想的素数表达式为 $f(n)=2^{2^n}+1$，当 $n=0,1,$

2,3,4 时都是素数(现称为费尔马素数),分别为 3,5,17,257,65537,但是 $F(5)$ 却是一个合数为 $2^{2^5}+1=2^{32}+1=6700417\times641$(称为费尔马合数),是否存在无限多个费尔马素数或费尔马合数,也是一个至今未解决的难题.解决这个问题的困难极大,即使是使用计算机,其工作量也是惊人的,假如要把 $F(73)$ 的各位数字打印在纸带上,其数码一律用五号字码,那么这一纸带可沿地球赤道大约绕 60 000 000 000 圈.

尽管费尔马素数的验证如此艰巨,但它却有令人想象不到的神奇作用.高斯利用费尔马素数,解决了欧氏几何中的古老问题——哪些正多边形是可以尺规作出的.在此之前,由于欧几里得在《几何原本》中给出了正 3,4,5,6 和 15 边形的作法,加上我们可以将正多边形外接圆的弧二等分,实际上,欧几里得给出了可用尺规作出的正多边形的边数为

$$2^k\times3,2^k\times4,2^k\times5,2^k\times15\ (k=0,1,2,\cdots).$$

至于是否还有其他的正多边形可用尺规作出,在高斯之前是无人知晓的.

高斯 19 岁时给出了一个正 $N$ 边形可以尺规作图的充分必要条件是 $N=2^kp_1p_2\cdots p_r$($p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是不同的费尔马素数),例如正十七边形可以尺规作出.据说这一创举决定了高斯一生将从事数学研究.哥廷根大学纪念高斯就是用正十七边形作为他的塑像的底座的.

虽然,人们没有找到全体素数的表达式,但是在 1896 年,法国数学家阿达玛和比利时人普辛用分析学方法证明了高斯等人猜到的素数定理:当 $n$ 很大时,小于或等于 $n$ 的素数的个数趋近于 $\frac{n}{\ln n}$.

1859 年,大数学家黎曼在研究小于给定自然数 $n$ 的素数的个数时,也使用了分析学方法,提出了黎曼函数:

$$\xi(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

其中 $s$ 是复数，指出，此函数的零点分布与小于给定自然数 $n$ 的素数的个数有某种确定的关系，并提出了关于 $\xi(s)$ 函数零点的黎曼猜想：在带形区域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中的一切零点都位于 $x=\frac{1}{2}$ 这一直线上．这也是一个至今未解决的难题，这个难题的研究推动了复变函数论的发展．

使用分析学中研究连续对象的方法来研究数论中的离散现象，导致了数论中的一个新的分支——解析数论的诞生．

数论研究的另一重要课题是将一个整数表示为一些整数的和、差、积的问题．欧几里得曾证明了"每一个大于 1 的整数都可以用唯一的方式分解为素数的乘积"的算术基本定理，例如 $10500=2\times2\times3\times5\times5\times5\times7$．欧几里得之所以证明它，因为它并不总是那样显而易见的．在一些特殊的类似整数的结构中，这却可能是不成立的，例如结构 $\{s,\cdot\}$，其中 $s$ 是普通的偶数集合 $\{2,4,6,8,10,\cdots\}$，"$\cdot$"是普通数的乘法．由于 $s$ 中的任意二数的乘积仍在 $s$ 中，故"$\cdot$"是 $s$ 上的二元运算，现在考虑 $s$ 中数的分解问题．我们首先定义：若 $s$ 中的某数不能分解成此集合中两个以上更小数的乘积，则称其为"伪质数"，如 6 就是 $s$ 中的伪质数，因为虽然 $6=2\times3$，但 3 不是 $s$ 中的数，于是 $s$ 中的伪质数为

$$\{2,6,10,14,18,22,\cdots\}.$$

这样一来，$s$ 中的某些数可分解成一些伪质数的乘积，但其分解却不是唯一的，例如 $60=2\times30$，或 $60=6\times10$．库默尔在证明费尔马大定理时，就犯了假定分解是唯一的错误，这个错误经狄利克雷指出后，库默尔提出了"理想数"的概念，使这种新类型的合数能满足分解成"质理想数"的唯一性．这又导致了数论的另一个新分支——代数数论的产生，而其创造出的"理想"这一概念，在抽象代数

的发展中,成为最漂亮而又带来累累硕果的概念之一.

## 18.3 数学王子高斯的功绩

数论的发展过程大致可分为三个阶段:

第一个阶段是以欧几里得及其《几何原本》为代表的.这个阶段主要总结了前人得到的整数与整数比的性质,所用的方法是几何法及受几何观点影响的算术法.

第二个阶段以费尔马及其大量的猜想为代表.这个阶段主要以用纯算术方法来论证猜想为主要方向.

第三阶段以高斯及其《算术研究》为代表,在数论研究中引进了新的分析方法以及同余理论,代数数和型的理论,从此一直左右着直至今天这门学科的发展方向.

高斯一生有着许多令人敬佩的成绩,例如他在代数学中首先给出了代数基本定理的完整证明;在天文学中第一次精确地算出小行星运行的椭圆形轨道;在微分几何中不仅首先给出了三维空间中曲面的微分几何定性理论,更重要的是将曲面本身也看作是一个空间,这个理论后经黎曼的发展,为广义相对论提供了基本工具;同时他还是非欧几何的创始人之一,对拓扑学、概率论等学科都做出了奠基性的贡献.但是公认的高斯贡献最大,也是高斯最喜爱的学科还是数论,他曾这样说过:“数学是科学之王,而数论是数学之王.”前面我们已经谈到,高斯的《算术研究》一书决定了至今100多年来数论研究的方向,这部著作的三个核心问题是同余理论、齐式论及剩余论、二次互反律.

同余的思想,虽然早已在欧拉、拉格朗日等人的著作中出现过,但是给出同余的记号,并在数论中系统地运用它的是高斯的《算术研究》.同余是一种很重要的分类思想,其基本理论是较为简单的:将整数集合按除以某一给定的整数所得的余数是否相同分成不同类,如7除以4余3,则7与3是同一类,在这种情况下,3,

7,11,15,…都是同一类,称它们是模 4 同余,记为

$$7\equiv3(\text{mod }4),7\equiv11(\text{mod }4),\ 7\equiv15(\text{mod }4),\cdots$$

用这种方法,可将整数集合分成剩余类集合,这在抽象代数的代数结构比较中成为一种重要的样板.

高斯建立了同余的思想和记法以后,更重要的是将同余式像处理方程那样来处理,例如,若 $a\equiv b(\text{mod }m)$, $c\equiv d(\text{mod }m)$则 $a+c\equiv b+d(\text{mod }m)$, $ac\equiv bd(\text{mod }m)$,不过在这里,消去律是不成立的,如 $26\equiv8(\text{mod }6)$即 $2\times13\equiv2\times4(\text{mod }6)$,但 $13\equiv4(\text{mod }6)$不成立.

在对同余式深入讨论的基础上,高斯第一次完美地证明了二次互反律:若 $p$ 和 $q$ 为不同的奇素数,且 $p$ 与 $q$ 都具有 $4n+1$ 的形式,则 $x^2\equiv q(\text{mod }p)$与 $x^2\equiv p(\text{mod }q)$同时有解或同时无解;若 $p$ 和 $q$ 都具有 $4n+3$ 的形式,则上述两同余式一个有解一个无解.高斯称二次互反律是数论中的“宝石”、“黄金律”.他一生中曾给出了八个这些定律的证明,且一个比一个简明、漂亮.对某一个定理多次给予不同的证明,以求最简捷和最严谨,这是高斯在科学研究上的一大特点.高斯认为:“绝对不能获得一个证明以后研究便告结束,或把寻找另外的证明当作多余的奢侈品”,“有时候你开始没有得到最简单和最美妙的证明,但往往就是这样的证明才能深入到数论的真正的奇妙联系中去,这正是吸引我们去继续研究的主动力,并且最能使我们有所发现.”

从二次互反律出发,高斯还相继引出了双二次互反律和三次互反律,以及与此相联系的双二次和三次剩余理论.为了使三次和双二次剩余理论优美而简单,他还发展出了复整数与复整数数论,这一理论的进一步结果是代数数理论.

在《算术研究》中,高斯不同寻常地以最大的篇幅讨论了型的理论.他从拉格朗日的著作中抽象出了型的等价概念以后,便一鼓作气提出了一系列关于型的等价定理和型的复合理论,这一工作

有效地向人们展示了型的重要性——用于处理关于任何多个整数的问题.正是由于高斯的带领,型的理论成为19世纪数论研究的一个主要课题.他关于型和型类的几何表示是如今所谓数的几何学的开端,其中关于复数的几何表示,更是众所周知的了.

由于高斯做出了那么多广泛而又深刻的贡献,连一些最著名的数学家也称他是自己面前的一座“使人肃然起敬的峰巅”,并称他为“数学王国的数学王子”.相传1807年原来资助他的那位公爵去世后,高斯面临寻找工作的实际问题,世界上许多重要的学术机构纷纷邀请他去就职.当时德国著名科学家冯·赫姆勃尔德希望高斯能留在德国,出任哥廷根天文台台长.他去征询当时德高望重的数学家拉普拉斯“谁是德国最好的数学家”?拉普拉斯答“法夫”,赫姆勃尔德很失望,又问“那您对高斯是怎样看的”?“噢,他当然是世界上最伟大的数学家啦.”拉普拉斯解释道.于是高斯担任了哥廷根天文台台长及哥廷根大学教授,直到1855年2月23日去世.

高斯一生有着那么多重大的贡献,但所发表的却相对很少.用今天的眼光来看,这位大师在学术上是过于谨慎了.他恪守这样的原则:“宁可少些,但要好些.”这样,他的著作像一棵棵只长果实不长枝叶的树,缺少分析与思想过程,这就给后人了解他的思想带来困难,难怪他的12卷文集的整理出版工作,竟整整延续了50年之久.

# 19 从"田忌赛马"谈起

## 19.1 孙膑的妙策

公元前300多年,战国时期著名的军事家孙武的后代孙膑与庞涓一起追随鬼谷子学习兵法.也许是遗传的缘故,这位军事家的后裔的血管里流淌着军人的一腔热血,他对兵法情有独钟,学习十分勤奋,受到了老师赏识,同时也引起了同门师弟庞涓的忌妒.当他们学业完成后,孙膑隐居山林,庞涓到魏国当了将军.庞涓心胸狭窄,嫉贤妒能,他害怕才华出众的孙膑会对自己的地位与利益有所危害,便花言巧语将孙膑骗到魏国,又施用诡计割去孙膑的膝盖骨,使其残废.古代称这种刑法为膑刑,孙膑这个名字就因为他受此酷刑而得.当时齐国的相国田忌为了强国富民,正千方百计广纳贤士.故派使臣用计将孙膑接到齐国,不久又将他举荐给齐威王,成为齐国的军师,在齐国军事作战中屡建奇功.

当时,齐国盛行赛马.田忌也经常参与齐威王及其公子们的赛马活动.按照比赛规则,赛马时每人出马三匹,分上、中、下三等,一次一匹,比赛三次,分等级比,胜二场者为赢.田忌的赛马比不上齐威王的马,因此,若上等对上等,中等对中等,下等对下等的比赛,田忌必输无疑,过去,田忌就是这样一直输给齐王.一天,田忌又要与齐王赛马了,孙膑对田忌说,这次我保证你会赢.

比赛开始了,齐王像往常一样,首先派出上等马.而孙膑却要田忌出下等马.这样,齐王很轻松地赢了第一局.齐王第二次派出的是中等马,孙膑让田忌出上等马,结果田忌扳回一局.到了第三局,齐王只剩下下等马了,而田忌却是中等马,田忌又赢了.最终田

忌以二比一胜了齐王.

孙膑在赛马中所采用的思想就是所谓对策论的思想.这种思想在古今中外兵法中已有很多体现.然而,一直到20世纪上半叶,人们才将这些常人认为不能用数学方法处理的问题数量化、公理化、系统化,形成了一个新的数学分支——对策论.其中,冯·诺伊曼的工作起了决定性的作用.

## 19.2 冯·诺伊曼

冯·诺伊曼(Von Neumann,John,1903.12.18～1957.2.8)是现代数学中极少数的能横跨几个学科的数学家之一,他的研究遍及纯粹数学、应用数学、力学、经济学、气象学、理论物理学、计算机科学以及人脑科学等领域.正如有一个著名科学家所指出的那样,"探讨冯·诺伊曼的个人志向和学术成就,那就等于探讨了过去30年来科学发展史的概要."更多的数学家认为,冯·诺伊曼的名字,应像牛顿、高斯一样"列入历史上最伟大的数学家名册中."随着时间的推移,人们越来越深刻地认识到这一点.

冯·诺伊曼出身于匈牙利布达佩斯的一个富有的犹太银行家的家庭,在良好的家庭环境中,冯·诺伊曼成了一个罕见的神童.据说他6岁就能心算八位数的除法,8岁掌握了微积分,12岁就领会了当时数学家波莱尔深奥的数学著作《函数论》.据说,他过目成诵,电话簿只要看一遍就能记住其中的姓名、地址和电话号码.对于他惊人的领悟和运算能力,他的数学老师、著名数学家费叶尔(L.Fejer,1880～1959)的一段话最能说明问题了.他说:"约翰(冯·诺伊曼)是我唯一感到害怕的学生,如果我在讲课中列出一道难题,那么在下课的时候,他总会拿着一张写得潦草的纸片对我说,他已把这道题解出来了."

1921年,年仅18岁的冯·诺伊曼和他的老师费克特(M.Fekete,1886～1957)合写了第一篇数学论文,并于次年在德国杂

志上发表.从这时起,冯·诺伊曼就立志要成为一位数学家.1926年他在苏黎世工业大学获得化学工程师文凭的同时,又在布加勒斯特大学获得数学博士学位.1927年在波兰里沃夫城召开的一个国际性的数学家会议上,他的关于集合论和数学基础方面的工作引起了数学界的普遍关注,在世界范围内获得了一定的知名度.1930年,他首次赴美,成为普林斯顿大学客座讲师.善于汇集人才的美国校方在了解到冯·诺伊曼的才华后立即转聘他为普林斯顿大学的访问教授.1933年,普林斯顿成立高级研究院,共聘有6名数学教授,年仅30岁的冯·诺伊曼是这些顶尖人才中最年轻的一位.

第二次世界大战在欧洲爆发以后,冯·诺伊曼应召参与了与反法西斯战争有关的科学计划的研究,特别是从1943年起,冯·诺伊曼担任了洛斯阿拉莫斯制造原子弹的顾问,并参与了电子计算机的研制工作.战后,他仍然保留了许多政府部门和委员会中的职务.1957年2月8日,冯·诺伊曼因癌症在医院逝世,享年53岁.

冯·诺伊曼的纯粹数学研究集中在1925～1940年,即他研究生涯的前半期,他首先关注的是集合论和逻辑.1929年,当他还是苏黎士大学的学生时,就发表过关于序数定义的论文,这个定义现已被数学界普遍采用.他的博士论文也是关于集合论公理系统的.30年代后期,他参与了希尔伯特的元数学计划,发表了一批证明部分算术公理无矛盾性的论文,直到1931年哥德尔的不可判定性定理发表,冯·诺伊曼才中止这方面的研究.此外,希尔伯特空间上的算子谱理论和算子环论在冯·诺伊曼的工作中占有重要的支配地位.特别地,冯·诺伊曼的声望还和他成功地解决了希尔伯特提出的数学问题中的第五题有关.他对数学物理的研究也有惊人的成就,是他首次将量子力学作了公理化处理,使这一物理现象纳人了严格的数学系统.

1940年是冯·诺伊曼科学生涯的一个转折点.在此以前,他是

通晓物理学的登峰造极的纯粹数学家,而 1940 年以后则成为牢固掌握纯粹数学的应用数学家.除了本书将在后面要重点介绍他在电子计算机科学方面所做的杰出贡献外,本节介绍的就是他在应用数学方面的一个杰出贡献——创立了对策论.

## 19.3 对策论的数量化、公理化和系统化

在冯·诺伊曼的工作之前,对策论仅仅是一种赌博、下棋和打牌的策略,而不能应用到其他方面.要知道,有几十个商人参加的交易会,其数学复杂程度要远远超过太阳系行星的运动情况.经过冯·诺伊曼将其数量化,并进一步公理化、系统化后成为一门崭新的数学学科,使之在经济、军事、科学管理和决策中功夫独到,为其他学科所无法比拟.有人甚至认为对策论是"20 世纪前半期最伟大的科学贡献之一".

那么,冯·诺伊曼是怎样将对策思想数量化的呢?为了使大家了解这一伟大的思想方法,我们仅就最简单的二人对策的情况进行讨论.二人对策就是分敌我双方进行竞争的对策,如一场决斗、两个棋队之间的比赛等.这种对策通常可分为零和对策与非零和对策.所谓零和对策是指竞赛双方的收益之和为零.如游乐场中的大多数赌博游戏,既不创造价值,又不会使价值减少,每一局胜负双方的输赢之和为零,即一方所赢之数正好等于另一方所输之数.否则称为非零和对策.

表 19—1

| 甲＼乙 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | -3 | 2 | 5 | 0 |
| 3 | 3 | -1 | -5 | -1 |

在二人间的零和对策中,为了描述每一步可能产生的结果,可用一个矩阵将一个局中人的收益(也为另一个局中人的损失)一一列出来.因此,这种对策又称为矩阵对策.如表 19—1,两个对局的人各自在一张纸上

写下一个数,但不能让对方知道这个数字. 甲方可选 1,2,3 中的一个数,乙方可选 1,2,3,4 中的一个数,数字一经选定,就可以出示,然后要求乙方按照表中支付矩阵所列各数向甲方支付. 为了便于讨论,我们用 $R$ 表示甲方,$C$ 表示乙方,此后,记号 $R_2$,$C_3$ 等有双重意义,如 $R_2$ 既表示甲在纸上写下数字 2,也表示支付矩阵中的第二行;$C_3$ 既表示乙选定数字 3,也表示支付矩阵中的第三列. 如若双方所选定的分别为 $R_3$,$C_2$,则矩阵中第三行第二列的元素为 $-1$,表示乙应付给甲 $-1$ 元钱,即对于乙来说获得了收益.

为了使对策的研究具有一般性,冯·诺伊曼将上述支付矩阵旁边的元素略去,这样,本例的支付矩阵可简化为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

如果甲、乙双方是两个竞争的组织,那么这个矩阵表示甲队有三种具体的行动方案可供选择,乙队有四种方案可供选择. 于是,冯·诺伊曼称矩阵本身就是对策. 在这里"对策"就表示一组规则.

现在,我们按下列 $3\times3$ 支付矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

研究一局对策. 显然,若甲取 $R_2$,乙取 $C_1$,则乙要付给甲 6 元钱;若甲取 $R_3$,乙取 $C_1$,则甲输给乙 5 元钱. 现在的问题是:对于甲和乙来说,是否存在最优的"策略",也即是否可以指明一行和一列,保证双方都只需冒最小的风险获取最大的收益? 答案是肯定的,下面我们说明这一点.

首先,考虑甲的打算,在支付矩阵中,$(R_2,C_1)$这个元素表示他能赢得 6 元,这是很诱人的. 若他看准这一目标,就要选取 $R_2$(第二行). 但是若乙不取 $C_1$,而取 $C_2$ 或 $C_3$,那么由于矩阵中

$(R_2,C_2)$和$(R_2,C_3)$的元素分别为 0 和 $-3$,所以甲不仅不可能赢到钱,反而可能输掉 3 元钱.这样,对于甲来说,$-3$ 这一元素是可能发生的最为不利的情况,因为它是第二行中最小的数.甲这时思忖着:乙也知道这些规则,他也可以自由地使用支付矩阵.因此他一定不会选 $C_1$,而要选 $C_3$,那么,自己将输给他 3 元.于是,甲决定考虑另外一行.他觉得也许可以在$(R_3,C_3)$处赢得 4 元.但是他若取得第三行,可能发生的最坏情况又是什么呢?他看到,$(R_3,C_1)$处的 $-5$ 是第三行中的最小数.也就是说,选这一行可能发生的最坏情况是输给乙 5 元钱,看来,$R_3$ 比 $R_2$ 冒的风险要更大.最后甲选中了第一行,因为他看到最坏的情况是赢得 1 元钱.因此,他推知,选取 $R_1$ 最保险,这可保证他自己冒最小的风险取得最大的收益.故我们将 $R_1$ 称为行支付的最大最小值.甲成功地运用了对策的思想:在竞争性对策中,一个人总得考虑对手可能采取的策略,才能合理地制订出自己的对策.

对于乙来说,他也会像甲那样去考虑,经过类似上述的一番推理,乙意识到,甲也不敢取 $R_2$ 和 $R_3$,而必定选 $R_1$.因此,在这种情况下,乙感到自己只有选 $C_2$,以便使甲的收益为最小.乙这时要输掉 1 元钱.问题是这对于乙来说是否是最优解呢?我们来看一看这个矩阵对于乙意味着什么?首先,乙可能喜欢选$(R_3,C_1)$处的 $-5$,但又一想,要是自己取了第一列,万一甲猜出自己的心思而选取第二行,这样不仅赢不到 5 元钱,反而会输掉 6 元钱,这是第一列中最大的数,不行!乙想只要有其他的方法,自己决不冒这个风险.也许乙可以考虑$(R_2,C_3)$处的 $-3$,但是,若取了 $C_3$,甲就可能取 $R_3$,这样也得输掉 4 元钱,4 是这一列中的最大的数.最后只剩下第二列了,这一列中最大的数为 1,这时最坏的情况也只是输 1 元.比较一下 $C_1,C_2,C_3$ 这三列中的最大值(分别是 6,4,1),$C_2$ 中的是最小的.对乙来说,这时要输的也只是 1 元钱,风险最小.我们将 1 称为列支付的最小最大值.

甲于乙知道甲会这样推算而选 $R_1$，因此对乙来说，$(R_1, C_2)$ 是这局对策的最优解. 乙必须输给甲 1 元钱. 这时，除了认为这局规则不公平外，乙别无他法.

甲、乙双方经过推算，得到同一对策略，也即得到对策矩阵中的同一个元素. 这时，冯·诺伊曼称之为可解. 一般地，若一局矩阵对策中，有

各行最小值中的最大值＝各列最大值中的最小值

则称这一对策具有一对纯策略表示的解. 出于这一原因，冯·诺伊曼用"最大最小解"这个名称. 而相应于乙的最小最大值(minmax)和甲的最大最小值(maxmin)的那个矩阵元素，就叫做对策的值(相对于甲而言). 甲、乙双方的盘算都迫使对策的值取行的最小支付值和列的最大支付值. 因此，此值在矩阵中的位置又常被称为用来模拟对策的几何图形——马鞍面的鞍点(如图 19－1 中的 $M$). 当然，矩阵中的各个元素并不具备马鞍面上各个点所具有的连续性.

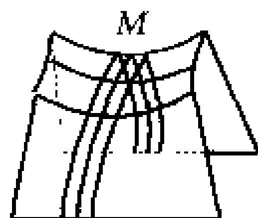



图 19—1

现在要问，在实际问题中是否每一矩阵对策都一定有解？我们再来看一个游戏：对局双方每人拿一枚分币放在手心中，不让对方看见是哪一面朝上，然后双方将分币出示，若两枚分币同为正面向上或同为反面向上，乙就把自己的分币付给甲；若两枚分币的正反面不同，由甲把自己的分币付给乙. 因此，该对局的支付矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

这时，甲查看各行中的最小值为 －1，－1，故有 max{各行中的最小值}＝－1；乙查看各列中的最大值为 1，1，故有 min{各列中的最大

值}=1.由此可见,这一对局并没有最优纯策略.

可是,每个玩过分币游戏的人都清楚,要想取得好的结果,总是设法使正面与反面出现的次数大致相等,并注意避免让对方看出自己在按照某种规律行事,这是正确的策略.这个游戏的解很具有典型性.在不存在鞍点的矩阵对策中,应该随机地变换各次对策的选择,从而在多次对策中也可以取得最优的结果.这种对策称为随机对策或混合对策.

冯·诺伊曼将上述随机性策略也数量化了.他首先根据支付矩阵的情况,设甲、乙取各行、列的频率为 $x,y$,得到含 $x,y$ 的概率矩阵.再根据长期平均收益做出关于 $x,y$ 的收益函数 $E(x,y)$,最后根据冯·诺伊曼著名的最小最大定理:在任何情况下,若 $\max\{\min E(x,y)\}=\min\{\max E(x,y)\}$,则每一矩阵对策都有解.可以看到,他的这个最小最大定理是十分关键的,它决定了任何一个矩阵是否有解.这是对策论中最重要的一个定理.1944 年,在冯·诺伊曼与摩根斯顿(Morgenstern)合作的《对策论与经济行为》一书中,不仅将他在 1928 年提出的这个定理进一步完善,还给出了其一般性的证明,基本上完成了对策思想的数量化、公理化和系统化,从而完成了对策论理论的奠基性工作.

对策论的成熟,使它的应用更广泛了.大到军事、经济、国家的对策,小到儿童常玩的"锤子、剪刀、布"游戏,都有对策论的思想和应用.在认识客观世界的漫长过程中,冯·诺伊曼像在电子计算机方面的开创性工作一样,又给人类带来了一个崭新的武器.

冯·诺伊曼早年是以研究纯粹数学见长的,战争却使他把自己研究的方向转向应用数学并做出了杰出的贡献.由于战争对科学技术需求的急剧增加,从而使科学技术的某些方面以比平时快得多的速度发展,这一点不仅为冯·诺伊曼的工作所证实,也为二次世界大战中涌现出来的一大批应用数学家的工作所证实,这一批数学家战前大都从事纯粹数学的研究,战争中改为研究应用数学,

这不仅推动了应用数学发展为现代数学，也使他们各有建树.

## 19.4 瓦尔德与统计决策函数

在冯·诺伊曼工作的基础上，使对策论得到进一步发展的是罗马尼亚出生的犹太人瓦尔德(A. Wald，1902～1950). 也像冯·诺伊曼一样，他战前也是从事纯粹数学研究的. 在二次大战中，德军占领奥地利，瓦尔德被关进集中营，受到纳粹非人的虐待. 不久，美国设法将他营救了出来，并将他移居美国，在战争中，应实际情况的需要，他建立了决策函数理论和序贯分析，开创了统计学的新局面. 遗憾的是，他年纪轻轻便于 1950 年因飞机失事而去世，时年仅 48 岁.

瓦尔德的统计决策函数是对冯·诺伊曼的概率矩阵的进一步发展. 在随机性对策中，怎样得到合理的概率矩阵是很重要的. 瓦尔德首次提出了统计决策函数，其根据大量的统计数据来决定对策，这使在随机性对策中做出的策略更具有科学性，瓦尔德因此而赢得了广泛的赞誉.

所谓序贯分析法是指在进行统计推断过程中，在每收集一个数据后考虑是否停止观测收集，并研究其对最终需要得出的结论有何影响的一种科学方法，因而，这是一种在选取样本进行统计推断时，一旦达到一定精度，便会自动停止的好方法. 在二次世界大战期间，美国海军需要进行一种统计推断试验，推断敌机的一次射击恰巧击中并引爆我方飞机所携带的炸弹的概率. 在这次试验中，由于使用了瓦尔德所提出的序贯分析法，并得到了瓦尔德自始至终的指导，从而节约了大量的弹药和试验费用.

除此之外，在第二次世界大战中诞生的新的应用数学学科还有线性规划. 它主要用于提高现存设备和人员的使用效率. 在战争中，英国海军运用这门科学，在搜寻德军潜艇方面，制定了有效的战术策略，精心、科学、合理地安排了投掷深水炸弹的计划，从而在

反击德军潜艇的战斗中,取得了很好的战绩,逐渐夺回了海上的控制权.美军在对大量新兵分配的决策中,也应用这门科学的思想与方法,给出了充分利用兵员的最优方案.此外,美国军方还运用对策论和线性规划,在新几内亚海域搜寻并炸沉日本舰艇的实战中,大大提高了有限的人力、物力的利用率,从而取得了胜利.

在第二次世界大战中诞生并得到迅速发展的线性规划、最优化方法和对策论一起被定名为"运筹学",其英文原意大致是"提高现存设备和人力的使用效率".在我国,主要考虑到这一分支开始是源于军事用途的,所谓"运筹帷幄、决胜千里"正是这一思想方法成功运用于军事决策的真实写照,故译名为"运筹学".实际上,在二次大战以后,这一分支在经济领域也得到广泛、重要的应用.如美国经济学家库普曼斯和前苏联经济学家库托洛维奇,因在经济领域中创造性地应用了运筹学,于 1975 年同获诺贝尔经济奖.

在我国,关于运筹学在经济建设等领域中应用的研究正方兴未艾.我们相信,在我国社会主义建设中,随着市场经济的逐步建立与完善,运筹学必将得到更加广泛和深入的应用.

# 20 "疯狂的年轻人"

有一位数学大师曾说过:"数学是年轻人的事业."不管这句话的正确性如何,数学的发展确实离不开一代又一代年轻人的激情.例如,数学神童阿贝尔、伽罗瓦对于方程理论的研究,使得代数学这一古老的学科发生了根本的变化;由于数学王子高斯的努力,数论这座大厦建造得更加完美;……这里,我们将要介绍给大家的是,一个年轻的数学家群体——布尔巴基学派——的理想、追求和事业.

## 20.1 初生的牛犊

1939年,法国巴黎的书店里推出一本新书——《数学原本》第一卷.自古希腊的欧几里得《几何原本》问世以来,还没有数学家敢再用"原本"作为书名,更有甚者,作者在序言中还"狂妄地"宣称,他们撰写这套书的目的就是要对整个数学进行整理与综合.这本书的作者是尼古拉·布尔巴基.

由于第二次世界大战的爆发,数学界的这一件大事并没有引起人们的特别注意.然而,布尔巴基并没有因为人们对"他"的冷落而气馁,这套丛书以平均每年一卷的速度陆续推出.由于它的独特风格,慢慢地,《数学原本》开始有了名气,并在全球风行,布尔巴基也随之名扬世界.由于谁也没有见过他,这位布尔巴基是谁在数学界一直是一个谜,人们猜测"他"可能是一群法国数学家的笔名.直到1968年,布尔巴基的真实面目才被披露出来,这个集体的一位

头面人物迪多内在罗马尼亚布加勒斯特数学研究所发表了题为《布尔巴基的事业》的演讲,首次把“布尔巴基”的真面目推诸公众面前,正如大家所猜测的那样,所谓“布尔巴基”确实是一个数学家团体,它的大部分成员是法国的年轻人.

众所周知,早在18世纪下半叶,法国就已成为当时世界数学的中心.大革命后,特别是拿破仑时代,政府重视科学,这一时期创立的高等工业学校和高等师范学校是法国数学家的摇篮,培养出了像勒让德、蒙日、泊松、傅里叶等大数学家.19世纪更是法国数学的黄金时代:伽罗瓦创立了群论,庞加莱创立了射影几何,傅里叶创立了三角级数论,柯西创立了复变函数论,并开始为分析奠定基础……但好景不长,1914年,第一次世界大战爆发了,年轻的科学家们也像其他法国人一样到前线服役,其后果是高等师范学校的战时名册上,三分之二师生的姓名上加了黑框.布尔巴基学派的创始人大都出生于20世纪初,并在一次大战后进入大学.在大学里,由于那些比他们年事稍长的青年数学家大多因投身沙场而被战火吞没,因此只能由老一辈的数学家如毕加、波雷尔、勒贝格、阿达玛和蒙代等人来亲自授课.然后,由于年龄的关系和个人研究的偏爱,这些德高望重的老者只能教给学生1900年以前的数学,主要是函数论,这批年轻人也只能在这样一个狭小的天地里施展自己的才干.

阿达玛的讨论班给这些年轻人“打开了通往外面世界的门”.在这个讨论班,每年由阿达玛选定他认为是去年最重要的论著分配给那些打算在讨论班上做报告的人,让他们在黑板上加以阐明.这种方式很快吸引了这些年轻人,在这里,他们不仅可以了解到一些数学研究动态和新的成果,还可以接触到各种不同来历的特别是外国的数学家.在这期间,他们当中的一些人如魏依、薛华荔、迪多内等人先后出国考察,接触到以诺特、阿廷、范德瓦尔登为代表的德国代数学派,以库拉托夫斯基、雪尔宾斯基为首的专门研究集

合论、拓扑学和泛函分析的波兰学派,以及意大利的代数几何学派,国外数学的突飞猛进,震惊了这些年轻人,他们认识到,如果法国依旧抱着"函数论王国"的金字招牌不放,则"在数学的其他方面,人们就会忘掉法国的数学家了".这将会使自费尔马到庞加莱形成的法国数学传统中断.

到了30年代,这些青年数学家大都有了出色的成就,并且他们之间保持着经常性的接触与交往,他们决心依靠集体的力量,振兴法国数学.1935年,大约有10名左右的年轻人,以魏依、德尔萨特、嘉当、迪多内和薛华荔5人为核心,聚在一起,决定编写一本分析教科书,以满足20世纪现代数学发展的需要.但是,他们很快发现,由于诺特代数学派的工作改变了整个数学的面貌,数学分析的基础也完全发生了变化.如果对现代数学的发展不能全面把握的话,是很难较好地完成这个计划的.于是,他们决心扩大目标,以书的形式来叙述整个现代数学,并准备在三年内完成这部宏大的著作,这就是布尔巴基学派及其主要著作《数学原本》的起源.这真是初生牛犊不怕虎,正如迪多内后来所说的那样:"假如他们年岁再大一些,知识再多一些,他们也就永远不会开始干这桩事业了."

## 20.2 共同的事业

布尔巴基的目标是要对数学的基本原理加以阐述.他们设想,这部著作首先应是一个工具,"它不仅在数学的一小部分中可以应用,而且在尽可能多的数学分支中也可以应用.因而,它必须集中在基本的数学思想以及根本的研究工作上面,它必须完全排除掉那些次要的材料,这些材料还没有什么直接的已知应用,也不直接导出那些已知很重要或证明是很重要的概念."因此,他们"所关心的是给出参考资料,并为希望了解一个理论的本质的人提供帮助".

要想达到上述目标,他们必须对许多以前从来没有仔细论述

过的知识加以讨论.可是,20世纪的数学已经发展到了每一位数学家都必须专业化的程度,也许只有少数像庞加莱、希尔伯特这样的大数学家才能掌握整个数学,而对于普通的数学家,特别是像布尔巴基的成员这样的年轻人,要想对整个数学有一个全面的认识是比较困难的,这使他们的工作遇到了始料未及的困难.然而,这批年轻人知难而上,毫不退缩,决心依靠集体的力量来克服这对个人来说难以想象的困难.他们一切从头学起,对于每一个问题,都集体讨论.

看看布尔巴基的活动是非常有趣的,他们每年聚会两到三次,在会议上,大家一旦决定需要写一本书或某一章或讨论某一专题时,就由某个自愿者按照一个相当巨大的计划起草初稿.一般说来,起草人可以自由地加进他认为需要的或者省略掉他认为不必要的那些材料.当然,这样做他是承担"风险"的,因为完成后的初稿将在布尔巴基的集会上全文宣读,每一个细节都要一点一点地检查,经受"无情地批判".不过,起草人也可以反驳,这种相互批判十分激烈,以至于局外人会认为这是"疯子的集会".争辩的结果,往往是把一部稿子批得体无完肤,而另选一位成员,让他一切重新再干.就这样一个接一个地去写,一本书稿往往要重复五六次,才送去印刷.仅就这一点我们就可以领略到布尔巴基们的那种狂热的工作激情和一丝不苟的工作态度了.

布尔巴基学派并没有什么成文的组织章程,要是有的话,那就是对年龄的限制.这个组织的奠基者们根据法国数学发展的经验教训,提出了一些措施.一方面,他们注意不断吸收新的青年成员,一旦发现值得重视的青年,就邀请他参加一次集会,在会议上,这个被邀请者必须经受得住那种火炮般的攻击,而且要敢于参加讨论,如果他只是沉默,则下次他将不会再被邀请了.并且他还要对所讨论的问题都有兴趣,如果仅仅是对某一方面的内容关注,尽管他可能是这个领域中第一流的学者,甚至比布尔巴基的大多数成

员都强,他也永远不可能成为布尔巴基的一员.另一方面,布尔巴基学派还规定,年龄超过50岁的成员必须自行退出.因为,"尽管一个年过50的人仍然可以是一位非常好的,并且极富有成果的数学家,但是他很难接受新的思想,接受那些比他们年轻25~30岁的人的思想."他们会认为,自己年轻时候所做的一切都是好的,没有理由加以改变.这样无疑会使布尔巴基的事业停滞不前.布尔巴基三四代不衰,仍然保持旺盛的生命力,这种特殊的作风和精神力量是十分重要的.

## 20.3 结构主义

数学发展到20世纪已经成为一个庞大的家族.这个家族分支繁多,形貌各异.不过它们既然都是这个家族中的成员,就要具备这个家族的某些基本特征.选择怎样的方式来反映这些分支的基本特征与相互关系,是布尔巴基们面临的首要问题.

众所周知,由于希尔伯特和戴德金等人的工作,数学的大部分理论都可以通过精选少数的公理作为出发点,运用逻辑推理的方式,富有成效地建立起来.这也就是说,用公理的形式给定一个理论的基础,就可以发展出整个理论.布尔巴基学派进一步认识到,这种方式还能够系统地研究不同的数学理论之间的相互关系.在考察这些关系的基础上,他们通过提炼,产生了布尔巴基的基本思想——数学结构的观念.

实际上,"结构"这个词在进入数学之前,已广泛存在于物理学、化学、天文学、地学、生物学、技术科学以及社会科学的众多领域中.它所反映的是一个事物各个部分或几个事物之间的本质性关系.而数学正是客观事物的一种抽象,由此看来,在数学中引入"结构"的观念是自然的,其意义也是重大的.

考虑一个结构,一般来说,离不开它的组成部分,即元素和它们的联系方式.布尔巴基学派把抽象集合作为结构的基石,他们认

为,给定一个集合,它的每个元素都是互不相关彼此独立的,但当对这些元素定义了大小、远近和运算关系后,它就有了"结构",而数学各分支间的差别主要表现为结构的不同.他们把数学中的基本结构归纳为三种:序结构、代数结构和拓扑结构,并称之为母结构.显然,这些母结构只是所考虑的类型中最一般的具有公理数目最少的结构,用它们来描述数学,虽然也能看出一些数学分支间共有的特性与本质的联系,不过太粗糙了.因此,在他们的研究中,往往是基于这三种母结构,通过各种方式,衍生出一些新的结构来处理形形色色的数学分支.最基本的方式是把所研究的数学对象的一些好的性质作为公理添加进来构成新的结构.

按照布尔巴基的基本观点,全部数学或大部分数学都可以依照结构的不同加以分类.用公理化方法抽象出各个分支的各种结构,找出它们之间的差异,就会获得这些分支的"内在联系的清晰图景".他们还认为,数学的发展无非就是各种结构的建成和发展而已.他们曾经做过这样一个通俗的比方:"数学好比一座大城市,城市中心有些巨大的建筑物,就好比是一个个已建成的数学理论体系.城市的郊区正在不断地并且多少有点杂乱无章地向外伸展,它们就好像是一些尚未发育成型的正在成长的数学新分支.与此同时,市中心又在时时重建,每次都是根据构思更清晰的计划和更合理的布局,在拆毁旧的迷宫似的断街小巷的同时,修筑起新的、更直更宽的、更加方便的林荫大道通向四方."显然,布尔巴基们所扮演的角色正是这样的设计师与建筑师.

现在,让我们简单介绍一下布尔巴基的主要著作《数学原本》.该书自1939年第一册问世以后,已出版了近40套.在前20年中,布尔巴基主要完成的是该书的第一部分"分析的基本结构",即将数学的结构及其主要部分亮了出来.这一部分有六卷:卷一为集合论,卷二为代数学,卷三为一般拓扑学,卷四为实变函数论,卷五为拓扑向量空间,卷六为积分学.由这六卷可以看出,它们是对20世

纪前半叶在集合论的基础上发展起来的抽象代数学、拓扑学以及泛函分析和测度、积分理论的总结.1960年以后,又分别出版了《李群与李代数》、《交换代数》、《谱理论》和《微分流形与解析流形》四个分册.

这套书在编排上极为别致.每卷分若干章,每章又再细分为若干节和小节,并配有大量的例子和练习.这些练习与正文配合密切,富有启发性,以至许多数学家认为,对于这套书来说,只看正文不做练习是一大损失.每卷末尾附有"词典"和"结果提要"."结果提要"是一卷的大纲,不过它往往是在各章前出版的."词典"是布尔巴基们精心选编的,由于布尔巴基的各位大师们的威望,现在数学界通用的许多数学名词,尤其是拓扑学与泛函中的新词,都是以该词典为准的.又如数学文献中最常用的自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集,大多按布尔巴基的用法分别用N,Z,Q,R,C来表示,该词典还细致地介绍了各数学名词演变的来龙去脉.

另外,《数学原本》每册的后面还附有"历史注记",这些注记一般是从经典原著出发,准确地叙述了某一部分的历史发展,将这些注记集中起来,就是一本非常好的"数学史"著作.

《数学原本》各分册的编排都有严格的逻辑顺序.在某一处用到的概念或结论,一定都是在以前某卷中出现过的.这样,在这部著作中,所有主要结果都清楚而确切地表述出来,成为一个完美的体系.它以自己的严格准确面成为标准参考书,是战后数学文献中被人引用次数最多的书籍之一.同时,它的这种行文风格也逐渐成为现代数学文献的典范.

在《数学原本》中,所有的内容是按结构来安排的.例如,按照人们通常的观点,实数是整个分析的基础,无疑必须在著作的一开始就引进了,然而,在布尔巴基的著作中,它却迟迟直到卷三的第四章才露面.因为从结构的观点看,实数的基础是三种母结构的相互作用.面从有理数出发构造实数不过是更一般的构造——拓扑

群的完备化——的特殊情形,而拓扑群的完备化又是"一致空间"完备化的特殊情形.布尔巴基就是这样由一般到特殊地建立起他们的这一套体系的.在他们这里,素数理论成了代数曲线理论的近邻,欧几里得几何则是希尔伯特空间的厄米特算子理论的特殊情况…….

《数学原本》虽然远远没有达到她的最早构思者们的预想,但她毕竟对近、现代数学做了有益的欧几里得式的尝试.当然,布尔巴基们所想要总结整理的数学材料,其涉及面之广,其内容之深,其量之大,是欧几里得几何所无法比拟的.也许,1968年流传于欧洲和北美数学界的布尔巴基的讣文,宣告"尼古拉·布尔巴基老爷于11月11日在南加哥自己的庄园中逝世"是明智的.但谁又敢保证,这位"布尔巴基"先生不会死而复生呢?谁又能说,他不是借假死而反省养息,以图东山再起呢?到那时,他也许会奉献给人类更完美、更精湛的《数学原本》.

布尔巴基的数学思想的核心是结构主义,可以看作是康托和希尔伯特倡导的近代形式公理化思想的进一步发展.不过,形式公理化思想着重于探讨各个分支的公理化方法,而布尔巴基的结构主义则采取全局的观点,着重分析各个数学分支间的结构差异和内在联系,而且对各个分支也着重分析其结构特征,或关于它的某些基本结构的组成方式,因此,这是更高一步、更深一层的抽象与概括,更有助于揭示外表上相差甚远的数学理论之间的内在亲缘关系.

结构主义的思想不仅对数学的研究和应用意义重大,而且对发展公共数学教育的内容和方法也有很大的影响.60年代在欧美各国掀起的"数学教育现代化"运动,有关改革的数学教材就是按"结构"的思想编写的.由于这场运动在大多数国家并不成功,使得那些对布尔巴基心怀不满的人借题发挥,对他们大肆进行攻击,许多不明真相的人也群起效仿,一时间,对布尔巴基和他们的结构主

义思想的责难四起.这实在是冤枉!殊不知,布尔巴基的结构思想是针对纯数学的理论核心而言的,他们对于普通公共数学教育并没有表现出多大的兴趣,尽管他们事业的起始是想编一本分析教科书.

总体来说,在20世纪的数学发展过程中,布尔巴基学派起到了承前启后的作用.他们把人类长期以来积累的数学知识,按照数学结构整理成一个井井有条、博大精深的体系.他们的《数学原本》是一部新的经典著作,已成为许多研究工作者的出发点和参考指南.这个体系连同他们其他的数学贡献,无可争辩地成为当代数学的一个重要组成部分.但是,由于数学内容的丰富性、多样性和发展的不平衡性,尤其是它与其他科学有着千丝万缕的联系,因此科学技术与社会的发展不断向数学提出了新的问题,这一切,使得局限在纯粹数学的象牙塔中的布尔巴基诸公难以适应,最后不得不宣告布尔巴基逝世.

布尔巴基的事业现在看来似乎已经衰落了.但布尔巴基的开拓者们在法国数学走下坡路的关键时刻挺身而出,勇于开拓,使法国数学重列世界之林的精神是值得我们学习的.

# 21　电子计算机与计算机数学

谈到数学,人们常会赞美她那严谨的结构、明确的结论和简捷的表述.然而,即使是最抽象的数学理论,也往往离不开大量复杂的计算.大家也许还不会忘记,20年前,我国数学家陈景润曾为解决哥德巴赫猜想,摘取数学王冠上的明珠作出过重大的贡献,而伴随着这一成绩的是躺在他床下那几麻袋演算手稿.早在17世纪,著名的德国数学家莱布尼兹就曾大声疾呼:"把计算交给机器去做,让优秀的人才从繁重的计算中解脱出来."我们想,这大概不仅仅是数学家,也是所有人共同的愿望吧!

## 21.1　电子计算机的诞生与发展

任何一项伟大的发明都不是在一个早上突然出现的.尽管电子计算机那令人眩晕的运算速度,使得人们无法将它与那些笨拙的算盘、绳结甚至卵石相提并论,但它确确实实是由这些简单的计算工具经过人们不断的改进、创造与发明,逐渐演变而来的.

人们为了寻求一种高速计算工具的努力可以追溯到很久以前,但真正可以称为计算机的出现是在17世纪的欧洲.1642年,法国数学家帕斯卡发明了一种机械的台式加法机.这是一个内部装有可以转动的圆筒、轮子和齿轮的金属盒,外面的十个轮子上分别刻有从0到9十个数字,而这十个轮子又分别连附在有相应齿数的齿轮上,将轮子转到适当的数字,即通过齿轮将数据输入了机器,然后转动曲柄来进行计算,这可以说是计算机的始祖.1671年,莱布尼兹又设计出了一台能加能乘的机器,但直到1694年才勉强制造成功.这类机器的实用价值是很小的,例如,直到18世纪

末,法国政府为推进百进位角度而重编三角函数表和三角函数对数表时,仍然使用人力进行计算.

英国科学家查尔斯·巴贝奇是计算机发展史上的一个重要人物.他性格古怪,但颇具独创性,而且兴趣十分广泛.大约在1812年,他开始考虑一种可帮助计算数学用表的机器.为了将全部的精力投入到机器的设计与制造中去,他辞去了剑桥大学的路卡斯讲座教授这一待遇优厚的职务,并投入了自己全部的财产.1823年,在英国政府的资助下,他着手研制一种有26位有效数字,能计算并打印出六阶差的差分机.但这项工作并没有取得令人满意的进展.10年之后,政府取消了资助,这并没有使他气馁.相反地,他放弃了差分机,开始研制他称之为分析机的更具雄心的机器.他设想这样的机器能完全自动地进行由操作者指定的一系列算术运算.遗憾的是,当时英国的工厂根本就生产不出他所需要的高精密零件.因此,直到1871年,巴贝奇逝世,这一梦想也未能实现.然而,关于这一设想,他给人们留下了大量的详尽计划、图纸和说明,为后人提供了许多真知灼见.巴贝奇的设想展示了当今计算机的几乎所有的核心部件.例如,他认识到,这样一种机器至少需要五个独立部分:(1)输入机构,向机器输入为提出问题和解决问题所需的信息;(2)存储器,保存所输入的资料以待机器需要时使用;(3)运算器,进行实际运算;(4)控制器,告诉机器何时和怎样使用所储存的信息;(5)输出装置,打印出结果.事实表明,后来的电子计算机的设计者们也正是遵循了一个与此相类似的方案.因此,从这一点看,尽管巴贝奇没有能造出一台计算机,但他对计算机事业的贡献是非常突出的.

1944年,美国国际商用机器公司(IBM)和哈佛大学联合研制的马克一号计算机,实现了巴贝奇的梦想.马克一号本质上是一台机械计算机,但它部分地使用了继电器,这表明电子技术开始进入计算机,并预示着电子计算机的时代即将到来.

早在1943年,正值第二次世界大战的关键时刻,美国阿伯丁

试炮场和宾夕法尼亚大学一起承担了为陆军计算炮击表的任务.大量的计算是由一台模拟计算机和100多名计算员用手工协助进行的,工作效率令人失望;宾夕法尼亚大学电工系的工程师埃克特和物理学家莫希莱提出了一个用电子元件制造计算机的方案.在计算炮击表的负责人、数学家戈德斯坦中尉的全力支持下,该方案获得了军方的赞同.于是ENIAC("电子数字积分和计算机"的英文缩写)开始投入了研制.

说来事也凑巧,这年夏天,戈德斯坦中尉在阿伯丁附近的火车站遇见了当时担任该试炮场顾问的著名数学家冯·诺伊曼.闲谈中,戈德斯坦介绍了电子计算机研制的有关情况,并告诉冯·诺伊曼,这种电子计算机一旦试制成功,将比以往的计算机的计算速度快1000倍,而当时,冯·诺伊曼也正为试制原子弹等项目中遇到的大量计算伤透了脑筋,当他获悉这一情况后,立即表现出异乎寻常的兴趣.几天后,他专程赶到费城宾夕法尼亚大学的莫尔学院,参观了这个尚在襁褓中的计算机,他详细地向主持这项研制工作的24岁的埃克特和负责总体设计的37岁的莫希莱了解了ENIAC的逻辑结构,当即以其过人的智慧指出了它的缺点,并参与了改进方案的研究.经过三年的紧张研制,1946年,ENIAC开始正式运行.该机占地170平方米,用了18 000个电子管,总重量达30吨,耗电140千瓦,运算速度为每秒5 000次加法,它能按照人们事先编好的程序自动地进行运算,从而体现了电子计算机最基本的特征.

成功的尝试使冯·诺伊曼预感到,计算机的发展将会对未来科学技术的发展产生不可估量的影响,因此,当第二次世界大战结束后,他即将自己的主要精力投入到电子计算机的研制与计算机理论的研究中去.

1946年,冯·诺伊曼带领戈德斯坦等人来到普林斯顿,开始了MANIAC("完全自动通用数字电子计算机"的英文缩写)的研究,并于1951年获得成功,其效率要比ENIAC高几百倍,运算速度达

每秒百万次以上. 这台机器在第一颗氢弹的研制中起了巨大的作用.

特别需要指出的,下述两项重大进展应归功于冯·诺伊曼:

(1)引入二进制. 由于电子元件的断开与接通两个状态可以与二进制中的两个数“0”和“1”对应,如果用“断开”对应于“0”,“接通”对应于“1”,那么二进制中的任何数都可转化为电子元件的开关变换. 冯·诺伊曼把二进制记数引入计算机,这就为计算机的全部操作建立了一个简单而有效的基础.

(2)采用存储程序. 使用计算机解决问题时必须编制出每一步骤的指令,即给出程序. 冯·诺伊曼认为,构成各个程序的复杂运算序列是由一系列简单的步骤构成的,而这些步骤会在一些程序中重复用到,如果能在计算机的存储器中存储这些步骤,那么,运算时只需指令机器取用其存储器中的某一部位,执行储存在那里的指令就可以了,不必每次都编制出全部新程序.

另外,冯·诺伊曼还发明了“流程图”,沟通了数学语言与计算机语言的联系;创立了自动编制程序的方法,简化了编制程序的繁琐工作并成功地将电子计算机应用于核武器的设计与天气预报等方面. 由于他的这些开创性的工作,西方数学界赞誉他为“计算机之父”.

在冯·诺伊曼完成这些开创性工作的同时,埃克特和莫希莱通力合作制造商用存贮程序计算机,由此,电子计算机的制造开始进入了工业生产的阶段.

从 ENIAC 的正式运行算起到今天,电子计算机诞生仅 50 年. 在这短短的 50 多年里,就机器本身而言,已经更换了五代:

第一代以电子管为主要元件,采用磁鼓存贮. 利用这一代计算机,人类把人造卫星送上了天;

第二代可以从 50 年代末算起,以晶体管构成基本电路,内存改用磁芯,外存使用磁盘,并开始有了算法语言与编译系统,运算

速度可达每秒几百万次,体积、重量、耗电和造价等都大为减少;

第三代是中小规模集电路计算机,这时已有操作系统、终端和网络,运算速度已达每秒千万次;

第四代计算机采用大规模集成电路,其体积与成本大幅度减少,而可靠性却大为提高;

第五代电子计算机已不再是进行数的计算的机器,而是一种适应社会普遍需要,能进行知识信息处理的计算机系统:它可以用语言、文字、图形等形式直接进行人机对话,并拥有大量的知识和一定的学习推理能力,能提供一些咨询服务,等等.这一代机器1988年诞生于日本,是由64台具有不同功能的"推论机器"并联而成的.

计算机发展至今天,已进入到网络时代,其越来越多的功用,已不是最初的设计者们所能想象的了.

在1946年第一台电子计算机诞生之际,很少人会料到,在以后的岁月里,电子计算机竟会产生如此巨大的影响.今天在发达国家,电子计算机已像电视一样成为日常生活的一部分,而且越来越变得必不可少.在我国,这方面的进程也比人们预料的快得多.可以这样说,未来社会的每一项活动中都将有电子计算机的踪迹.并且,在某些方面,它将代替人脑的一部分,成为人脑的一个侧面的延伸.

前面我们已经谈到,计算机的产生为数学家们提供了有力的助手,反过来,计算机的发展又向数学家们提出了新的研究课题.围绕电子计算机的研制、应用,逐渐形成的各种数学理论和方法,构成了数学的一个新的分支,这就是所谓计算机数学.

## 21.2 计算机数学

让我们先从计算机科学谈起.1965年,美国出现了一门新的学科:computer science,通常译为计算机科学.自它诞生之日起,围

绕这门学科的性质，就展开了剧烈的争论. 有人认为，它主要是要研究与计算机有关的现象，故属于经验科学；有人则把它们看作是某种抽象科学，理由是“信息结构是计算机科学的核心”；还有人指出，它是一种技术科学，因为它的主要任务是研究与管理软件工程. 这三种观点至今还在相互争论. 目前要全面概括它的本质也确实很难做到. 随着这门科学的飞跃发展，必将使我们对它的本质的认识逐步深化.

现在还是让我们先了解一下计算机科学发展的简单过程. 它的发展大致可分为以下几个阶段：

(1)1950～1960 年，为计算机科学的经验发现时期. 这一时期的基本活动是发现、描述“计算机现象”和收集数据、归纳经验、寻求算法，并建立了大量的程序语言如 FORTRAN、ALGOL、COBOL 和 LISP 等.

(2)1960～1969 年，计算机科学的抽象化与精细化时期. 经过上一时期的工作，摆在计算机科学家面前的是上千种程序语言，一方面需要对它们的各种优点加以综合，以获得更丰富的语言；另一方面，需要对它们进行形式描述，由此发展了形式语言理论. 在自动机理论与形式语言的指导下，这一时期人们还得到各种分析程序的方法，从而提高了编译系统的可靠性，并为它的自动化开辟了道路.

(3)1970～1979 年，计算机科学的软件工艺创新时期. 70 年代初，计算机科学的重点开始由纯理论的抽象研究转向软件工艺，主要工作有结构程序设计、模块设计和说明，以及程序验证等. 这一时期的另一个特点是开始了智能模拟的研究.

(4)从 1980 年开始，计算机科学的研究基本是围绕研制第五代计算机展开的. 主要表现在智能界面、知识库管理和问题的求解与推理这三种基本功能的研究，目前已取得了令人瞩目的成就.

总体来说，这门学科的历史与其他学科相比，可以说是很短的，但随着新技术革命的日益发展，计算机应用领域的不断拓广，

计算机科学已成为发展迅速、举世瞩目的新兴学科.

至此,大家也许会问,以上所说的计算机科学与我们本节要说的计算机数学有什么联系与区别呢?其实,就计算机科学的研究内容与形式而言,很大一部分就是把有关计算机的现象及相互关系用抽象的数学形式表现出来,概括成概念、公理、定律、原理等,然后进行理论的研究,进而提出新概念、发现新规律,并在实践中解释和利用这些新的概念和规律.因此,人们将这部分内容称为计算机数学,把它作为数学的一个分支.

构成计算机数学的核心是数据结构、算法和程序设计,而这些核心内容又都是建立在所谓离散结构的基础之上的.特别地,我们把计算机科学用以研究系统结构和客体之间关系为主的数学内容称为离散数学;用以研究计算、构形等为主的数学内容称为组合数学.这二者都属离散结构范畴,是计算机数学的主要内容.一般认为,它们包括数理逻辑、集合论、代数结构和布尔代数、图论、形式语言和自动机这五个主要部分.虽然计算机数学作为一门学科正式形成于20世纪70年代初,但它的主要内容却都已有较长的历史.例如,数理逻辑的创始者是17世纪德国数学家兼哲学家莱布尼兹.莱布尼兹是一位百科全书式的天才,在众多的领域中都留下了不可磨灭的足迹,这里我们要介绍的是,他倡导建立"通用语言"和"推理演算"这两种工具.前者的任务是消除数学中现有语言的局限性和不规范性,变成世界通用语言,他设想,这样一种语言应使用简单明了的形式符号,以便于逻辑分析与综合;后者主要用于处理通用语言,规定符号的演变规则和运算规则,以使逻辑演算可以依照一条明确的道路进行.遗憾的是,莱布尼兹并未能真正建立起这两种工具,并在很长的一段时间里,这一设想被人们认为是一个空想家的怪念头.后来,莱布尼兹的这一伟大思想在布尔和德·摩根那里复活了,这两位都是当时最著名的逻辑学家,他们试图将传统代数置于合适的假设之上.1854年,布尔出版了《思维律》一书,他仿照数学方法来改革传统逻辑,建立起了命题代数.虽然在

写作时，他对莱布尼兹的思想还一无所知，但他创造的东西却十分简单与清晰，故有人称他为符号逻辑的“第二次发明者”．到了1879年，弗雷格在其《表意符号》一书中阐述了命题演算和一阶谓词演算，可以说，数理逻辑的整个基础到弗雷格时代初步形成，可惜的是，弗雷格使用了一套独特的符号，使他的工作并未受到人们的注意．1894年，皮亚诺与一些人合作，开始实施莱布尼兹计划中的余留部分，写成《数学公式》五卷，在这部著作中，广泛地采用了皮亚诺创造的一种科学“世界语”．由于皮亚诺一直坚持宣传这种语言的作用，故使用十分广泛．20世纪罗素在皮亚诺的基础上完成了命题演算与谓词演算的完备性研究，从而完全确定了数理逻辑的基础．

又如图论最早起源于对一些数学难题的研究，如1736年欧拉归纳解决的哥尼斯堡七桥问题，以及哈密顿的环路问题，地图着色的四色猜想等．但它作为一门独立的学科，其发展形成在很大程度上是由于运筹学工作者们专心研究实际问题的结果．如我国数学家管梅谷提出的“邮路问题”就是图论应用于运筹学的卓有成效的结果之一．图论的应用十分广泛，早在1847年，基尔霍夫就用图论来分析电路网络，后来庞加莱又将图论引入拓扑学，建立起“位置分析学”和“断点”等概念，当它与计算机结下亲缘关系后，其发展更为迅速，使得某些难题的证明变为现实．1976年，美国伊利诺斯大学的阿佩尔等人用计算机证明了100多年来未解决的难题——四色问题．他们的方法是归纳为2000多个不同图形的组合结构，利用三台高速计算机对这些图形进行分析．

作为计算机科学的基础，计算机数学在目前已初步形成了系统的理论体系，但是，它还很年轻，它旺盛的生命力使得它正朝气蓬勃向前发展．我们相信，作为现代数学的一个重要组成部分，随着人类对电子计算机的认识水平与实践水平的不断提高，它必将更加丰富多彩．

# 22　又是一场数学革命吗?

提起数学,人们自然会将它与"精确"联系起来,即使是数学家,也常常会为数学的精确严谨、逻辑性强而感到自豪.然而,就在20世纪60年代,诞生了一门新的数学分支——"模糊数学".很多人难以理解,一贯以严谨精确著称的数学,怎么会模糊起来了呢?

## 22.1　模糊数学产生的背景

谁也不会否认,现代数学的基础是集合论.正如数学家策梅罗所指出的那样,在普通集合论中,一个元素对于一个集合来说,要么属于它,要么不属于它,二者必居其一,而且仅居其一,绝不容许模棱两可.因此,一个集合到底包含哪些事物(这称做集合的外延)必须明确,这是最起码的要求.按照这个要求建立起来的数学,就突出了三个重要的特征:精确性、逻辑性和实用性.人们现在通常把这样的数学称为精确数学或经典数学,如我们熟悉的几何、代数、微积分等.但是,由于这个要求,大大限制了数学的应用范围,而使它无法处理日常生活和社会实践中大量不明确的模糊观象和概念,人们常说的所谓"秃头悖论"就是这一矛盾的生动直观的反映.

所谓"秃头悖论"是这样的:如果我们事先约定,头发根数不超过某一确定的常数 $n_0$ 的人为秃头,这样,自然有人会问,头发根数为 $n_0+1$ 的人是否算是秃头?据约定,由于他的头发根数已超过了 $n_0$,应不算秃头.但他的头发仅比头发根数为 $n_0$ 的秃头多了一根,这样定性实在有点不公平,看来,上面的约定不太合理.稍微

改一下吧，再约定，若当 $n=n_0$ 时为秃头，则 $n=n_0+1$ 亦为秃头．这下可不得了啦，根据数学归纳法，我们可以推得，世界上所有的人都是秃头．显然，这是一个谬论．但是，从上述约定到结论的推理却没有半点毛病．这是怎么回事呢？原来，秃头这一概念本身并不是一个明确的概念，确切地说，它并没有确定的外延，其界限本来就不十分清楚，因此，勉强用“是非”的标准来划分，就必然会导致谬论了．其实，这类模糊概念在人们的社会实践、日常生活以及科学研究中比比皆是，如年轻、体胖、附近、高压、低温等，它们都没有明确的外延，因此，像“张三年轻”、“李四体胖”这类命题的判定也不是绝对的．对于这些模糊的量，只能用一种“模糊”的方法去描述、刻画和处理，才能使结果更符合实际、更准确；如果硬行地规定一个标准，那反而会有不准确之感，甚至会导出笑话．这些现象表明，经典数学赖以生存的二值逻辑（即任一命题非真即假，非假即真，二者必居而且仅居其一）对此已无能为力了．美国加利福尼亚大学的控制论专家 L.A. 查德另辟蹊径，勇敢地冲破二值逻辑的局限，创立了一门崭新的学科——模糊数学，为解决这类问题，提供了有力的工具．

L.A. 查德（L.A.Zadeh，1921～　）是一位著名的控制论专家，多年来战斗在精确性与模糊性搏斗的疆场，回旋于“人脑思维”与“计算机”的矛盾之中．为了从根本上解决上述模糊性问题，他重新研究了数学的基础——集合论，寻找数学方法与人脑思维的分歧所在．终于，他发现，普通集合论实质上是扬弃了模糊性而抽象出来的，它把思维过程绝对化，从而达到精确、严格的目的．即一个被讨论的对象 $x$，或者具有某种性质，记为 $x\in A$，或者不具有某种性质，记为 $x\notin A$，二者必居而且仅居其一，决不容许模棱两可，从而忽略了事物在具有这种性质时程度上的差异，但是这种差异有时却是很重要的．例如在医疗诊断中“四肢无力”这一症状，对于各个具体的病例之间的差异却是很大的．有的仅是劳累之后稍有

疲劳感,而有的则近乎瘫痪,因此医生在处方时必须考虑到"四肢无力"这个模糊概念的程度,若稍有差池,则后果严重.为此,查德提出了一种新的集合理论——模糊集合论.1965年,他发表的题为《模糊集合》的两篇论文,数学界普遍公认,这标志着模糊数学的诞生.

需要特别指出的是,计算机科学是模糊数学诞生的摇篮.模糊数学从它诞生之日起,便和电子计算机的发展息息相关、相辅相成.我们知道,电子计算机发展的一个重要方向是模拟人脑的思维,而人的思维活动是在逻辑思维、形象思维和灵感等的综合作用下进行的,这后二者具有很大的模糊性,正是这种模糊性才使人们的大脑能够灵活地进行思维.然而,精确数学无法描述和处理事物的模糊性,也就无法真实地反映人脑的思维活动.由于电子计算机是以传统的精确数学与二值逻辑为基础的,这就决定了它不具备像人脑那样灵活处理事物的模糊性的能力.例如,我们看电视,总希望把图象调得更清晰一些,这对一个三四岁的小孩来说,也是一件轻而易举的事情,但对电子计算机来说,却是一个大难题,因为"更清晰一些"这个概念是不明确的,也就是说,不清晰与清晰以及很清晰之间都没有确定的界限.为此必须建立起相应的、能够描述和处理模糊现象及其关系的数学方法,这正是查德所创立的模糊数学所面临的任务和所要解决的问题.

## 22.2　模糊数学的思想和方法

现代数学是与集合论密切相关的.在普通集合论中,事物 $x$ 与集合 $A$ 之间有着明确的隶属关系,要么属于,要么不属于,两者必居其一,不能模棱两可.数学家们将这种关系用特征函数 $A(x)$ 表示

$$A(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in A \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } x\notin A \text{ 时}.\end{cases}$$

这种特征函数是一种二值函数,它只能表示事物“非此即彼”的状态,不能表示事物在中介过渡时所呈现出的“亦此亦彼”性.如前所述,普通集合论的这种明确性决定了它应用的局限性.

与普通集合论相区别,模糊集合所表示的概念没有明确的外延.对于这种集合,一个事物与它没有绝对分明的隶属关系,即不能简单地用“属于”或“不属于”来描述事物和它的关系.以我们上面所举的“秃头悖论”为例,设所有人的集合为 $A$,那么你就无法借助头发的根数将其划分为“秃”与“非秃”两个子集.因为“秃”与“非秃”是两个模糊概念,因此这两个子集也就是模糊子集了.

为了能够用数学语言来刻画这种模糊子集,查德对描述普通集合的特征函数进行了推广.他把原来函数值的集合{0,1}改造为区间[0,1],通过构造一个定义在论域 $\mu$ 上的隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\quad(0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant 1)$$

来刻画元素 $x$ 隶属于集合 $A$ 的程度.其实,隶属函数的概念对我们来说并不陌生.人们常说“某事有 80% 的把握”,“某人的咳嗽多半是由感冒引起的,”以及统计中常用的加权数等都体现了这种隶属函数的思想.下面我们通过例子来具体地看一看如何用隶属函数描述模糊现象.

**例**　以年龄作论域取 $\mu=[0,100]$,“年老”与“年轻”这两个模糊概念分别用两个模糊子集 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 来表示.查德给出这两个模糊子集的隶属函数如下:

$$\mu_{\underset{\sim}{o}}(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<x\leqslant 100.\end{cases}$$

这两个隶属函数可分别用图 22—1 和图 22—2 表示出来.可以看

出,凡小于 25 岁和大于 75 岁的人,都分别明显地属于"年轻"和"年老",而大于 25 岁、小于 75 岁之间的人都处于"年轻"与"年老"的中间过度状态.

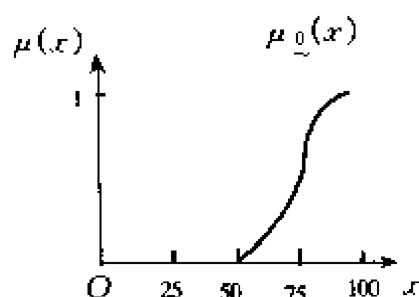



图 22—1

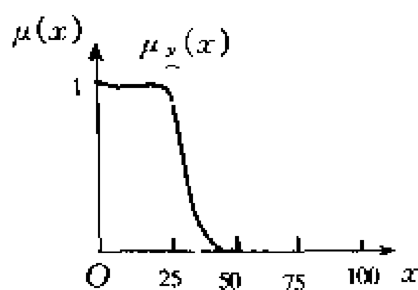



图 22—2

上面的例子说明,模糊数学的基础——模糊集合的概念是由隶属函数来定义的,它本身并没有什么明确的范围.因此,隶属函数是描述模糊性的关键.显然,隶属函数随着问题的不同而具有不同的表达形式和具体内容,所以,它的确定是模糊数学研究的最基本的内容.由于隶属函数是客观事物的本质属性在人脑中的反映,故它的选取既有客观标准,也有主观因素,尚缺少很好的数学方法和理论依据.其探求的方法,有的根据统计试验,有的采取加权平均,有的是理论概括、综合评判,有的是实践经验,五花八门,不一而论.

其实,普通集合与模糊集合之间并没有天然的鸿沟,当隶属函数 $u_{\underset{\sim}{A}}(x)$的值域仅取[0,1]闭区间的两个端点,即 0,1 时,隶属函数 $u_{\underset{\sim}{A}}(x)$就退化为特征函数 $A(x)$,模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 也就退化为普通集合 $A$ 了.模糊数学的概念是经典数学概念的推广与发展,因此,模糊数学广泛使用着经典数学的方法.具体说来,这种联系通过分解定理和扩张原理来实现.根据前者我们可把模糊集中的问题分解为普通集中的问题来解决;后者则把普通集中的概念、理论和方法拓展到模糊集中去,它提供了为处理模糊量而把非模糊的数学概念进行扩充的一般方法,这是由查德于 1975 年引进的.

在这里，我们可以再一次看到，查德的工作并不是让数学放弃其严格性去迁就其模糊性，而是让数学回过头来汲取人脑对于模糊现象识别与判决中的优点，从而为数学的研究开辟了新的方向.所以说，模糊数学的出现，不仅使数学的应用范围大大扩展了，而且也对科学方法论带来了冲击.尽管它从诞生到现在才只有短短的30年，但已经显示了强大的生命力和渗透力.它的研究领域非常广阔，在基础理论方面就有模糊集、模糊关系、模糊变换、模糊识别、模糊拓扑、模糊语言和模糊逻辑等；另一方面，由于它是一门边缘学科，它的成长又是与其他学科交织在一起的，因而还有模糊信息、模糊控制、模糊系统、模糊概率、模糊测度等多科性的综合研究.目前，大多数分支还不够成熟，正在继续发展完善之中.下面我们以在模糊数学中占重要地位的模糊逻辑为例，作一简单的介绍.

我们知道，集合论和数理逻辑在某些方面是等价的.因此，在1965年查德的模糊子集理论诞生后，首先便应用于数理逻辑.资料表明，在1966年，马利诺斯已经发表了模糊逻辑的内部研究报告，它标志着模糊逻辑的诞生.接着，查德提出了模糊语言变量这一重要概念.到了1974年，他不仅进行了系统的探讨，而且将它用于拟然推理的研究.同时，马丹尼把模糊逻辑与模糊语言用于工业控制，提出了模糊控制论.此外，美国的戈根、斯卡勒等人也对模糊逻辑进行了多方面的探讨.

大家都知道，随着电子计算机的发展，数理逻辑已成为计算机科学和自动控制理论的重要基础.计算机要模拟人脑思维，这就需要考虑到人类思维的某些逻辑特性与规律，并将其形式化，以便机器能够接受.但由于客观事物不是那样的绝对化，在真与假之间还有很多过渡状态，这就是所谓模糊性.为此，必须探索自然语言的形式化表达的问题，这样，模糊逻辑就发展起来了.从内容上看，模糊逻辑是把数理逻辑的联结词的使用和真值表的取值作了相应的推广.但实际上，模糊逻辑是作为模糊数学而不是作为数理逻辑的

直接推广和分支而产生的. 而且从一开始,它就具有浓厚的应用色彩. 因此,它与数学的关系十分密切,而作为一门逻辑,其规则在理论上至今还很不完整、不系统,甚至至今还没有明确的定义.

## 22.3 模糊数学的应用

由于模糊数学打破了形而上学的束缚,既认识到事物"非此即彼"的明晰性状态,又认识到事物的"亦此亦彼"的模糊性状态. 因此,它的应用前景更加广阔. 正如日本学者浅居代治在他的一本著作中谈到的那样,早在1965～1975年十年间,模糊数学的应用领域就有自动机、系统科学、信息、控制、生物、医学、心理、人工智能等等,近年来,发展的速度更是迅猛.

我国于1976年开始,先后多次邀请国外学者来华讲学,介绍模糊数学. 近几年来,研究队伍不断扩大,研究水平也不断提高,取得了一些可喜的成果. 除了在模糊拓扑的理论研究方面处于领先地位外,在气象预报、医学、农业、工业、体育科学等方面的应用,也取得了较好的成就. 例如,天气预报,什么是"多云",什么是"冷",

以新的启示,而且在理论和应用的研究上也显示了广阔的前景.有人将之与非标准分析、突变理论等称为是现代数学革命的产物.但是,由于模糊数学在形式上与经典数学的不同,再加上自身在理论和方法上的不完善,也有人对之持怀疑甚至否定的态度.如国外有一位逻辑学家就说:"我对模糊逻辑的看法是完全否定的,没有看到模糊逻辑有什么有趣的结果."还有人甚至认为模糊集合论只不过是"一个形而上学的小玩艺儿".一些概率论学者也认为,模糊数学只不过是概率论的一个应用而已.其实,概率论研究的是随机性问题,而模糊数学则是研究模糊性的问题,这是另一类不确定的问题:事件本身是模糊的,而其发生与否则是确定的,不是随机的,因此,它们是各有所司,谈不上谁是谁的分支.

我们认为,在经典数学、或然数学与模糊数学这三位一体的科学体系面前,对客观事物的规律性的认识,必将达到一个新的水平.让我们引用查德在1977年的一段精彩讲话,作为我们本章的结束语:"在即将到来的年代里,我相信,近似推理的模糊数学,将发展成为一个重要领域,而变成研究哲学、语言、心理、管理、社会、医学诊断等领域的新方法的基础.与此同时,我们同样会看到,古典逻辑基础上的模糊集数学理论的许多重要进展,将对纯粹数学及应用数学做出显著的贡献.无须多说,对模糊集合论今后10年的发展,只能有一个朦胧的想法.但可以肯定的是……模糊集合论的重要性、影响和应用都将得到迅速发展,最终,必将在人类知识和科学方法论的宝库中占有一席之地."



# 23　数学符号

数学符号在数学科学中占重要地位,它是表述数学成果、交流数学思想不可缺少的工具.我们知道,时至今日,数学已成为一项集体事业和全社会的需要,为了传递数学知识,数学符号成为不可缺少的工具.所谓数学符号是约定的一种人工语言符号,用以表达数学的研究成果和交换数学信息,数学符号在原有数学理论基础上,通过事先约定的含义来简化或代替某些数学理论的语言叙述.它不仅可以直接地标志数学所研究的对象,例如数学概念与概念之间的关系,还能以符号公式的方式,简明地概括其内在思维过程中的复杂推理以及定理.

## 23.1　数学符号的历史演变

数学符号的历史发展,大致可以分为萌芽时期、产生时期和形式化时期三个阶段.

### 23.1.1　萌芽时期

从古代到16世纪,人们对数学符号的认识还是朦胧的.远在有文字记载之前,数的概念和计数方法以及对各种形状的认识就已经发展起来了.随着生产的发展,许多文明发达较早的民族逐渐产生了各自的记数符号和记数方法,经过长期的、一定范围内的交流、传播和比较、鉴别,加之,1450年约翰·古登堡活版印刷的发明对数码规范化的促进,到16世纪和以后更长些时间,逐渐形成了目前比较通行的阿拉伯记数符号和记数方法.

人们记数,经历了从原始记数至数字符号记数的发展阶段,其中,原始符号记数,包括实物记数、结绳记数和刻痕记数等.

在七八千年前的新古器时代,人类开始定居,并出现了一定规模的农牧业,劳动的发展和交往的增多促进了记数的产生.开始,数字符号是用实物指代的,例如,至今还有些原始部落的土人仍用身体器官指代数量,他们顺次从左手小指、无名指直到拇指分别指代1,2,…,5,用腕、手肘之间直至颈分别指代6,7,…,10等等.后来,由于实物指代不满足需要,便产生结绳记数和刻痕记数.正如我国《周易·系辞》中记载的:"上古结绳而治,后世圣人易之以书契."这里,"实物"、"结绳"和"刻痕"都属原始的记数符号.

在记数法方面的伟大创造是位值制,即数字符号所处的不同位置代表不同的值,利用数字符号和位值原则就可以达到用最少的数字符号而有效地表达数的目的.这一创造归功于中国和印度.在宋代,我国还出现了在数码上画一斜线"/"表示负数,这与今天的负数表示法已相去不远.元代刘瑾(1300年左右)在《律吕成书》中,曾用数目降格表示小数,这是世界上最早的十进小数表示法.

中国之所以有如此先进的记数方法,与我国长期以来借助算筹作为计算工具是分不开的,因为算筹的排列为人们的记数提供了鲜明的直观印象,而数码记数只不过是算筹列数的翻版.

位值记数法完善的关键是符号"0"的出现,这一贡献当推印度人.最初,印度用空位表示零,后来为了避免混淆,他们开始改为用小点,后来又改为相似于目前的零记号,这可以从印度中央邦西北部的个廖尔城的一块石碑上得到证实.中国虽最早创用十进制位值记数法,但零长期是采用空位表示的.20世纪初在敦煌千佛洞发现唐代的《立成算经》中,208记作‖ Ⅲ.由于我国古代缺字都用□表示,而书写时"○"比"□"易于书写,故后来逐渐用"○"代替"□"表示零.

拉普拉斯对十进制数字符号记数给予了极高的评价,他说:

“用十个记号来表示一切的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值……这是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以致我们忽视了它的真正伟绩.但恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米德和阿波罗尼斯的天才思想的关注时，我们更感到这成就的伟大了.”

运算符号并非随着运算的产生立即出现.古埃及、中国、希腊和印度长期都没有加法符号，把两个数字符号写在一起就表示相加，在今天的带分数写法中，我们仍可以看到这种遗迹.直至3世纪时，希腊才出现减号 ↑.公元6世纪，印度出现缩写符号，其中乘法用 bharita(乘)的缩写 bha 表示，减法则在减数上画出一点来表示，加法和除法仍无符号.

对符号的注意是从欧洲开始的.起先，欧洲人承袭印度的做法，用单词的第一字母作符号，如用拉丁字母的 P(Plus 的第一字母，意为相加)表示加，用 M(Miaus 的第一字母，意为相减)表示减.到了16世纪才形成了近似于目前使用的运算符号.

代数在这一时期基本上都是文辞的和缩写的.古希腊代数与巴比伦和埃及的一样基本上是文辞的，只是在3世纪，丢番图有意识地使用了缩写符号后才进入缩写阶段.印度的代数是缩写的，且缩写的程度强于丢番图.例如，婆罗门笈多(约628年)及其后人，就用 Ca 1644 ni lru 6302 表示 1644y + L + 6302.其中，Ca 是 Calaca (黑的)缩写，用以表示第二未知数，ni 和 ru 分别是 nilaca、rupa 的缩写，表示第三未知数和单纯数，且几部分并列在一起表示相加，没有加号.

在古埃及的数学纸草和巴比伦的数学泥板中，已发现在图形上标有尺寸，但还没有出现标注字母的情况.1世纪，海伦在《经纬仪》一书中，曾用△表示三角形，ou或p′表示平行和平行四边形.3

世纪，帕普斯用○和⊙表圆，∠表直角，□表正方形. 1202 年，意大利斐波那契开始用 $a, b, c, \cdots$ 等小写字母表示点. 但这些符号还都是零星的，象形的，且带有极大的随意性. 后来，在代数符号化的推动下，加之 17 世纪代数与几何的结合产生解析几何，促进了几何图形符号的急速发展. 到 19 世纪，法国几何学家卡诺的著作(1801 年)中，几何图形的符号已很接近于现在了. 如 $A, B, C$ 表示点，$\overline{AB}$，$\overset{\frown}{AB}$分别表示线段 $AB$ 和弧 $AB$，$\overline{BCD}$表示 $C$ 在 $B, C$ 之间的共线三点 $B, C, D$，$\overline{AB} \cdot \overline{CD}$表示直线 $AB$、$CD$ 的交点，等等.

### 23.1.2 产生时期

从 15 世纪起，欧洲爆发了一场被称为文艺复兴的深刻的资产阶级民主革命，前后历时 200 多年. 新兴资产阶级反封建的革命斗争，为科学发展扫清了道路. 而科学的发展又要求作为启发思维有效手段的数学创造一种更适合于它发展的符号语言，加之此时我国的造纸、印刷术传入欧洲，更为数学符号的创造和应用提供了物质条件. 这一时期，人们对数学符号的认识已从朦胧阶段进入到有意识的创用阶段，其突出表现在代数符号的变革和变量数学符号的产生上.

数学符号的创用使代数从文辞的、缩写的阶段进入到了符号的阶段. 这一转变的主要标志有三方面：一是表示未知数和已知数的符号的出现；二是合理的幂次符号的建立；三是运算符号和关系符号的产生.

未知数、已知数符号的出现是代数走向符号化的重要一环，没有它，数学便不能从特殊走向一般. 法国数学家韦达是数学史上第一个有意识地系统使用字母的人，1585 年，他创用大写元音字母 $A, E, I, O$ 等表示未知数，辅音字母 $B, G, D$ 等表示已知数. 并称使用字母后的代数方程所表示的是“类的计算术”，以别于“数的计算术”，以此作为代数与算术的分界线. 但他的符号体系还是混乱的，言词常与缩写混在一起，没有等号，乘号用“in”表示. 在这以

后,笛卡儿对韦达的字母作了改进.他用字母表中前面的字母表示已知量,末后的表示未知量,成为现今的习惯用法.

幂次符号是伴随着代数摆脱几何束缚的趋势而产生的.起先,人们往往借助平方、立方来表示幂.后来,笛卡儿作了改进,他用 $x^{\text{IV}}+4x^{\text{III}}-19x^{\text{II}}-106x-120$ 表示 $x^4+4x^3-19x^2-160x-120$,从而首先给出了正整指数幂的现代表示法.在笛卡儿工作的基础上,瓦里士、牛顿还创用了零指数、负指数和分数指数幂记号.至此,统一分式、根式的科学的幂次符号便得到了完全的确立.

数学符号按其性质可分为元素符号、关系符号、运算符号、约定和辅助符号,代数从文辞的、缩写的进入到符号的,除有元素符号外还必须有运算符号、关系符号以及某些约定和辅助符号,因为它们都是简化逻辑推理所不可缺少的.

近代运算符号和关系符号是在缩写符号的基础上发展起来的."+"、"-"号开始时是作为"超过"和不足"由德国数学家维特曼于1489年引进的,直到1514年,荷兰赫芝才赋予它加、减号的意义."×"乘号是英国数学家奥特里德于1631年在《数学的关键》一书中首先使用的.1698年,莱布尼兹又创用了点乘号"·".除号"÷"是瑞士数学家拉恩于1659年首先使用并由牛顿、瓦里士提倡的,据说,它是由曾经用作过除号的"-"与":"的组合.关系符号"="是英国列科尔德于1557年引入并由莱布尼兹倡导的.列氏说:"最相像的两件东西是两条平行线,所以这两条线应该用来表示相等."辅助符号圆括号始见于1544年,方括号是瓦里士首先使用的,花括号是韦达于1593年引入的.正是由于这样三方而符号的出现,代数在十六七世纪才从文辞的、缩写的开始进入到符号化的阶段.

从17世纪初到18世纪末,欧洲正处于封建社会解体、资本主义生产方式产生与发展的时期.这一时期,由于航海、军事、工场手工业等项事业的发展,迫切要求数学脱离常量的框架进入到变量

的时期，而 16 世纪起符号代数的产生，使我们可以通过符号取值的改变来刻画客观事物的变化，从而使研究对象进入到变量领域，为以微积分为代表的变量数学的产生创造了条件.

被誉为“人类精神最高胜利”的微积分，其符号是由它的理论创立者牛顿、莱布尼兹各自独立创造的. 牛顿把变量叫做流，变量的变化率叫做流数，对于流 $x$，$y$ 的流数记作 $\dot{x}$，$\dot{y}$. 其记号首见于他 1736 年出版《流数法和无穷级数》一书. 莱布尼兹于 1684 年在题为《关于极大和极小以及切线的一种新方法，它对分数或无理数也适用》的文章中，首先使用微分记号 d，积分记号“$\int$”是莱布尼兹与雅各·贝努利在通信讨论中共同创造的，$\int$ 是和 Sum 一词第一字母的拉长.

微积分符号的一次重要飞跃是“$\varepsilon-\delta$”符号语言的产生. 由于牛顿时代的微积分是建立在 2000 多年前古希腊学者的模糊不清的无穷小概念之上的，这就不可避免地导致了数学的危机，为克服这种危机，柯西、维尔斯特拉斯建立了“$\varepsilon-\delta$”符号语言，摆脱了几何直观，完成了对极限、连续等一系列重要概念的静态刻画，从而结束了微积分发展史上的种种混乱局面，有力地推动了整个分析数学的发展.

### 23.1.3 形式化时期

19 世纪末，数学在刚刚解决了由微积分概念的模糊性而带来的种种麻烦后不久，又出现了集合悖论，这更进一步促进了人们对数学基础的研究，推动了数学符号向更高的形式发展，其主要标志是普通逻辑的符号化、数学化而产生的数理逻辑及公理化从抽象到纯形式的发展.

首先，人们从逻辑和语言上对数学基础进行研究，引进了量词符号，这首见于弗雷格 1879 年《表意符号》一书. 在此书中，他完备地发展了命题演算，又几乎很完备地发展了谓词演算. 但弗雷格的符号和历来相传的、当时使用的、迄今使用的都完全不同，以致他

的学说长时间没人注意. 1885 年,皮尔斯引进了当今仍使用的存在量词、全称量词符号$\sum\lambda$ 和$\prod\lambda$. 量词的引入对简化数学表达和推理具有重要意义. 因为在近代数学中,到处充满有关量词的语句和推导,例如,作为微积分基础的极限概念的定义中就有三个量词重叠的语句. 自弗雷格以后,意大利数学家皮亚诺于 1894 年出版了《数学公式》,他正式利用前人命题演算和谓词演算的成果,用以表述数学,推导数学,至今所沿用的记号大多是由皮亚诺认定的. 此外,他又区分了集合论中$\in$(属于)和$\Leftrightarrow$(包含)符号. 在皮亚诺稍后些,罗素和怀特海系统总结了普通逻辑符号化、数学化的研究成果于《数学原理》一书,成为数理逻辑成熟的主要标志.

数学符号形式化的另一标志是公理化方法从抽象到形式化的发展. 这是希尔伯特在数学基础研究中,为了进行数学绝对相容性的证明而采取的重要步骤. 所谓形式化,用他自己的话说就是,"取代了那种用自然语言来表达的,具有内容的数学知识,我们最后得到的是由数学符号和逻辑符号所组成的一组公式,这些公式是按照一定的规则依次得出的;其中的一些相当于数学公理,而那种从一些公式推出另一些公式时所用的规则相当于内容上的推理,从而内容上的推理就为那些由规则所决定的形式过程所代替."这样,希尔伯特就把数学符号的发展推向了一个系统化、形式化的阶段. 由于符号的形式化摆脱了对象具体的特定性,这就使数学研究的意义得到了极大的扩充. 同时,符号的形式化又清楚地揭示了各种数学理论的逻辑结构,为深入研究各种数学理论的内在联系奠定了基础.

## 23.2 数学符号的方法论意义

### 23.2.1 明确数学问题,简化数学推理

数学符号按其结构可分为基本符号、组合符号和公式符号.基本符号是表示单个概念的符号,它是符号系统中不可分割的最小单位,如 $a$,$x$,+ 等.若干基本符号的组合就形成组合符号,它表示复杂的数学概念,形成数学符号的"短语",如$(a+b)^2$ 等.如果组合符号与基本符号中的关系符号按一定规则相连就形成公式符号,它表达一个判断,一个命题.而多个公式符号的组成就形成数学中的推理.由于任何符号都是由基本符号组成的,而每个基本符号都是充分简缩的词或句子,故用符号表达的概念、命题、推理自然要比自然语言简洁和明确得多,从而就有助于人们理解问题,分析和解决问题.正如怀特海所说:"这些术语和符号的引人,往往是为了理论的易于表述和解决问题.特别是在数学中,只要细加分析即可发现符号化给数学理论的表述和论证带来极大的方便,甚至是必不可少的."

例如,在数学分析的发展史上,人们对证明变量的极限一直是束手无策的,而对变量能否到达它的极限也常争论不休.然而,当极限概念采用 $\varepsilon-\delta$ 符号方式定义后,这些问题就迎刃而解了.正如世界著名数学家 R. 柯朗所说:"在 $\varepsilon-\delta$ 定义中独立变量并不运动,它在任何的物理意义下并不'趋近于'或'迫近'极限.这些语句以及记号→依旧保留,它们所表达的富有启示性的直观感觉,是数学家们不会也不应该放过的.但是在实际的科学过程中,欲验证极限的存在性,则必须应用 $\varepsilon-\delta$ 定义.这个定义是否圆满地反映了趋近概念的直观'动态',这与几何公理是否提供对空间直观概念的圆满解释一样,它们属于同一类问题.两者的表述都舍弃了若干直观上的实在的内容,但是在表示我们对这些概念的知识时,他们却成为适宜的数学结构."可见,符号对揭示概念实质及便于推

理论证等都有极其重要的意义.

符号的形式是多样的,图形也是一种符号,希尔伯特说:“算术符号是写出来的图形,而几何图形则是画出来的公式.”重视“画出来的公式”在明化数学问题、简化数学推理中的作用十分重要.法国著名数学家雅克·阿达玛曾借用大数学家欧拉的事例来提醒人们,他说:“科学史上,欧拉所给出的下述例子是众所周知的.他为了向一个瑞典王子解释演绎的特性,而用圆来代表一般的概念,让我们考虑 $A$ 和 $B$ 两类事物,如果‘凡是 $A$ 都是 $B$’,则我们就想象圆 $A$ 位于圆 $B$ 之内……我自己在进行某种推理时,也不用语言来代表思想,语言并不能使我看清这个推理过程是否正确,我使用类似于欧拉的方法,不过不是用圆圈,而是用某种不固定的图形来表示.”

### 23.2.2 触发人们的创造性思维

人的思维过程实际上是一个对信息的处理、加工亦即组合、选择的过程,故进入人脑信息量的多少往往影响着人的思维质量.由于符号是高度浓缩信息的携带者,故应用符号思考常能缩减思维劳动,加速思维进程,从而易于获得创造性思维.尤其是符号的形式化发展使得通过理性思维构思出某些新概念,常常成为数学发现的有力工具.拉普拉斯以数学分析的符号化对创造性思维的触发作用为例,论述道:“数学分析的语言,是所有的数学语言中最完善的语言,而且语言本身就成为新发现的有力工具.特别是那些被构思出来的种种必要概念,往往是许多新算法的起点.”同时,由于符号常以直观、鲜明的形式将抽象的概念呈现在人们的眼前,故符号思维往往具有简洁、明了、易为心灵感受的特点和优点,从而也有助于触发人们的创造性思维.

例如,由幂的公式符号 $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ 出发,可触发人们对分数指数幂的思考,因为 $x^{1/2}\cdot x^{1/2}=x$,故可用 $x^{1/2}$ 来记 $\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$.同样,由 $x^m\div x^n=x^{m-n}$,可创造出负指数幂和零指数幂的概

念,牛顿正是出于这种触发才创造了分数指数幂和负指数幂.

### 23.2.3 实现思维的机械操作

由于符号形式易于运算和推理,故研究问题时,人们可以暂时撇开符号的意义而仅着眼于形式.当符号与一定的概念单值地对应时,思维的操作可转换为对符号的操作,而符号的操作可委托机器进行,故人们利用符号借助计算机,便可使复杂、繁重的脑力劳动机械化,从而实现智力的解放.17 世纪时,莱布尼兹曾预言说:"一旦完成了这一计划,人类就将获得这样一种新工具,它对于人类理解能力的增强程度将远远超出任何一种光学仪器对于视力的加强."20 世纪 40 年代,世界第一台电子计算机由美国制成,使上述设想变为现实,电子计算机的出现极大地解放了人们的智力劳动,其中困扰人们百余年的四色问题,由美国青年数学家阿佩尔和哈肯利利用电子计算机,将问题化为 1500 个构形,并在每秒运算一千万次的计算机上算了 1000 小时后终于得到解决就是一例.更为重要的是,数学思维的机械化使数学比任何时候都更具有威力和渗透力,它不但极大地拓展了数学的应用范围,而且改变了数学应用的实践方式.比如天文学中超新星的爆发过程,地学中的地壳运动,都难以在实验室里实验,却可以用计算机通过数学模型来模拟,从而对各种理论解释进行检验.因此,数学思维机械操作的出现,使科学研究的方式除了传统的理论工作和实验工作外,还出现了计算机实验.

### 23.2.4 促进数学和其他学科走向成熟

一门学科的数学符号化程度,常常是这门学科是否成熟的重要标志.

数学史上不乏这样的事例,由于缺乏能够说清真正实质的符号,数学的某个领域就得不到发展.典型的例子就是代数学,为了写出一般的代数方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$,从丢番图到韦达和莱布尼兹用了整整 13 个世纪.在我国,宋代秦九韶解了许

多高次方程(包括十次方程),但不能发现一般二次方程的根与系数关系;又如宋元时期,由天元术发展到四元术而不能再向多元方向发展,致使四元术成为用算筹解方程的顶峰.所有这些,都与缺乏先进符号有极大关系.正如卡佐力在他的《数学符号史》中指出:"中国代数学在14世纪以后停滞不前的事实,主要是由于它不完善的、无适应性的符号."可见,先进的符号对数学理论的建立和发展具有重要意义.

不仅数学科学的成熟发展依赖于先进的符号,就是其他学科的成熟发展也是如此.康德说:"我坚定地认为,任何一门自然科学,只有当它应用数学工具进行研究时,才能算是一门发展渐趋完善的真实科学……而且一门科学对于数学工具的应用程度,就是这门科学渐变为真实科学的发展程度."科学史上,正是由于牛顿、麦克斯韦、爱因斯坦、海森堡等人分别应用了微积分、偏微分方程、黎曼几何、矩阵等数学工具,才促进了物理科学从感性到理性的不断成熟.

## 23.3 数学符号的选择原则

数学符号的发展史表明:一方面,数学符号随着社会实践的发展,不断淘劣存优,推陈出新,其间,许多富有创造精神的数学家,如韦达、笛卡儿、牛顿、莱布尼兹、希尔伯特等都作出了重要的贡献;另一方面,由于历史的和认识的局限性,在现存的符号体系中还存在若干令人遗憾的不足.对此,布尔巴基甚至说:"只要粗略地检查一遍现存的符号,就表明很少有一看就懂十分简单的……其中大多数符号只要不把它们复杂化到毫无用处的程度就不足以消除掉它们所固有的歧义."M. 克莱因也说:"到17世纪末,数学里已特意(即不是偶然或碰巧地)使用符号并认识到它所能赋予的功效和一般性,只可惜那些并不认识符号重要性的人漫不经心而随意引入的符号太多了,而至今却都已通用……我们今日所用的符

号,是许多已摒弃的符号系统中个别残留记号的杂烩."正是由于这样的原因,布尔巴基才把修订数学符号作为自己的一项重要工作.

数学符号作为数学科学中的人工语言符号,它的能指与所指间的关系,开始时是任意的,但一经选定就相对稳定.在诸多的能指与所指的关系中,怎样科学地选择具有约定俗成的关系,在组成组合符号、公式符号时,基本符号又该怎样选择?概括说来,它应遵循以下几项原则.

### 23.3.1 整体性原则

任何一门成熟的学科,必须是具有内部联系的、有系统的整体,数学尤其是近现代数学,一般是按公理化体系组织的,这就使得作为表述数学思想工具的数学符号间的联系,比之其他学科更具有逻辑性、系统性;同时,数学的发展,使其社会化程度越来越强,研究者越来越多,应用也越来越广泛地渗透到了自然和社会的一切领域;并且,数学的进一步形式化,也使数学符号不断自我生成新的符号.这样,就有可能使符号的使用造成混乱、重复和失去控制.这就要求人们不断加强对符号的审视和修订,且在修订时要充分注意数学的系统性、逻辑性、各数学分支符号的一致性、协调性和无矛盾性,不要顾此失彼,前后相悖.例如,数理逻辑中的否定、合取、析取、蕴涵、相等,怀特海、罗素的记法是 $P$, $P\cdot Q$, $P\vee Q$, $P\supset Q$, $P=Q$;希尔伯特的记法是 $\overline{P}$, $PQ$, $P\vee Q$, $P\rightarrow Q$, $PQ$;而波兰学者的记法是 $N_p$, $K_q$, $A_{pq}$, $C_{pq}$, $E_{pq}$.几乎是一个作者一套符号,不但重复,而且相互矛盾.这就需要加以审视和修订,真正使符号系统成为统一、有序、相容的整体,以保证数学的整体性、逻辑性和系统性,这就是数学符号选择的整体性原则.

### 23.3.2 单义性原则

任何自然语言都有二个基本组成部分,一是元素(字母)和词汇,二是语法和语法结构.但自然语言无论是字母、词或语法、语法

结构都是非单义的.其表现是一个字或词常有多种含义,且"自然语言中语法结构和逻辑结构之间不存在普遍性和必然性的一致……使得语言有可能歪曲和臆造思想"等.这种非单义的情况,严重妨碍了数学的逻辑推理和精确研究.正如维特根斯坦所说:"在日常语言中,常有同一个词用完全不同的方法来标记——因此属于两个不同的符号——或者用不同的方法来标记的两个词,在命题中看来是以同样的方式来应用的……因此,很容易发生最基本的混淆(整个哲学就充满了这种混淆)……为了避免这些谬误……方法就是在不同的符号中,不应用相同的记号,不以同样的方式来应用不同的方式标记的词."因此,要求作为数学科学人工语言符号的数学符号必须是单义的,即符号的能指与所指的关系要互为单值映射,且用基本符号组合成各种组合符号和推理符号时,其语法必须按预定的法则进行.例如,在数学史上,角的符号与小于符号曾发生冲突,都用"∠"表示,为满足单义性,前者后来改为"<";数论中,高斯和勒让德分别用符号"≡"与"="来表示同余,因符号"="已用来表示一般的相等,故人们舍弃了勒让德的符号而保留了高斯的符号.数学中还存在若干同一概念用不同符号表示的情况,如分数指数幂与根号表示法,负指数幂与分数表示法等拟应归于统一.在公式符号的组成上,也有个单义性问题.通常的构成顺序是高级运算先于低级运算,带辅助符号的式子先于不带辅助符号的式子,在辅助符号内,应先小括号后中括号再大括号等.

### 23.3.3 简明性原则

简明性是数学的特点和优点,也是数学美的重要组成部分.数学简明性的关键在于符号和符号系统的选择上,对于符号系统,要求用它来表达的公理化体系,应该是相容的、独立的和完备的,即在此系统中,不能包含任何一条多余的公理或缺少任何一条公理,也不能有任何矛盾的公理.否则,便不能是既简单而又明了的.又如在不同的公理化体系或同一问题的不同解决方案或模型中,应

选择使用符号较少的系统. 正如皮亚诺所说:“数学的一切进步都是对引入符号的反应……在两种符号体系中,符号用得较少的一般是可取的.”例如,对于解决集合悖论,罗素和他的学生兰姆赛都提出了解决的方案. 罗素的方案是所谓的“分支类型论”,它不仅按对象的性质、性质的性质……加以分类,而且对每一类的性质,又按性质的意义加以分级,在类中分级的基础上,利用恶性循环原则排除悖论. 而兰姆赛的简单类型论是在废除分支类型中关于级的划分后仅保留类的划分,且只承认类型混淆原则而不承认恶性循环原则的基础上建立起来的. 由于简单类型论比之分支类型论所涉及的符号系统要少得多,故简单类型论要比分支类型论简单得多,从而也就易于为人们所接受. 此外,在基本符号的选择上,要使书写、排版方便. 且“用词要尽可能地短,并且容易翻译成主要的科学语言”. 在用基本符号组成公式符号时要公式整齐、对称,运算简洁、明了. 正如皮亚诺所说:“符号方法的基本用途是便于计算.”

例如,小数符号 2.5,至 19 世纪还有 2|5;2′|5;2▲5;2‘5;2,5 等记法,相比起来,目前沿用的记号书写要简便些. 表达线段、角、三角形面积的加减,如选择有向线段、有向角、有向面积符号,就会使运算简洁,论证明了. 射影几何中,引进无穷远元素符号,就可以建立对偶原理;分式与根式采用幂的记号,就能化幂的高级运算为指数的低级运算. 欧拉选用小写字母 $a,b,c$ 表示三角形的边,其对应的大写字母 $A,B,C$ 表示相应的角,就能使三角形诸公式整齐、对称、简单、明了,等等. 所有这些都不失为是符号选择简明性原则的范例.

**23.3.4 表意性原则**

在可能的情况下,符号的选择应力求反映该符号所指概念、公式的思维特征,这主要包括概念、公式的由来、实质、客观现实原型、几何直观和隐涵着的丰富、深刻的内容等. 或者如迪多内所说的,“如果可能的话”,要“能够让人想起它们所指称的概念或者它

们的创使人”.例如,导数符号$\frac{dy}{dx}$就是能揭示导数、微分思维实质的一种符号.因为它表明,函数在某点处的切线的纵坐标改变量与横坐标改变量的商,亦即在该点处的切线斜率,这就深刻揭示了导数、微分概念的内在联系,并具有鲜明的直观形象.正如卡约里(F. Cajorl)在评价这一符号时所指出的那样:“尽管印刷不是特别合意,但这个符号现在比任何其他竞争者都得到更广泛的接受,最重要的原因是这个符号的适应性,应用简单的代数过程,人们就很容易从导数得到微分,给读者的心智直觉地暗示了带有两个垂直边 $dy$ 和 $dx$ 的直角三角形的特征.这个符号容易唤起达到微积分对几何和力学应用的核心思想.”

又如,用矩阵符号表达仿射变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \quad |A| \neq 0, \tag{*}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix},$$

其思维特征揭示得更是淋漓尽致,事实上,设有仿射坐标系$\{0;\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$,它在仿射变换下的像是$\{0';\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'\}$,则$\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$和$\overrightarrow{O}O'$相对于$\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$的坐标正分别是 $A$ 的第一、第二列向量和 $B$,而$|A|$又恰是图形在仿射变换下的变积系数,且公式(*)还隐含了“任何不共线的三对对应点决定维一一个仿射变换”这一平面仿射几何基本定理.

### 23.3.5 科学性原则

符号指代的概念要确切、无误、严格、科学,没有潜在的歧义,同时,符号指代什么,也必须明白、确切,不能模棱两可,似是而非.如长期以来,人们对 $f$ 与 $f(x)$一直混淆不清,常常将依变元 $y$ 亦即 $f(x)$误认为是函数关系.其实,$f$ 是对应法则或算法,$f(x)$即

是 $y$ 是 $x$ 按对应法则 $f$ 所得的函数值，$y=f(x)$ 是 $y$ 与 $x$ 间的函数关系的一般表示. 1921 年，波兰数学家库拉托夫斯基采用在集合基础上定义序偶，而后再用序偶定义函数并给出相应的符号的方法是很可取的. 其做法是，将序偶 $(a,b)$ 定义为集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$，又设 $f$ 是一个序偶的集合，如果当 $(x,y_1)\in f$，且 $(x,y_2)\in f$ 时，$y_1=y_2$，则称 $f$ 为一个函数. 其记号所指代的概念确切、清楚，又是建立在现代数学的集合论基石上，不失为一种科学性较好的表述方法.

数学符号的选择原则除如上几方面外，还需注意人们历史的和现实的使用习惯，即所谓习惯性原则，这里不再赘述.

# 24 数学悖论

本章从分析悖论的涵义及渊源出发,具体论述数学悖论与数学史上的三次"危机",进而论述数学悖论的成因及其意义.

## 24.1 悖论的含义和渊源

现代意义下悖论的涵义采用费兰克(A.A.Frank)与布劳威尔(Y.Bar-Hillel)的说法:"如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的,但在这个理论中却推出了互相矛盾的命题,或者证明了这样一个复合命题,它表现为两个互相矛盾的命题的等价式,那么,我们就说这个理论包含了一个悖论."这个定义表明了三层意思:首先指明了任何一个悖论总是相对于某一理论系统而言的;其次又指出了一个悖论可以表现为某一理论系统中两个互相矛盾的命题的形式;最后指出,悖论也可集中地表现为"肯定等价于否定"的复合命题.

关于悖论可追溯到古希腊和我国先秦时代,那时及其以后的相当长的历史时期中,悖论往往泛指这样的推理过程,这一过程看上去是合理的,但推出的结果却又是违背客观实际的,如芝诺悖论便属于这一类悖论.另外,由于新概念的引入而违背了具有历史局限性的传统观念,一时也被称为悖论,如伽利略发现平方数与自然数一一对应而与全体大于部分的原则发生矛盾,这在历史上称为伽利略悖论.事实上,这不是伽利略的发现在推理上有什么问题,而是由于全体大于部分的直观原则是从有限数量的事物关系中抽

象出来的，已经不再适合无穷集合的情形了.这些悖论与现代意义下的悖论涵义已略有距离.

历史上，与今天所讲的悖论涵义较为接近的是公元前6世纪克里特哲学家爱帕美拉德斯(Epimenides)发现的一个"悖论".其原始命题是:"一个克里特人说:'所有的克里特人所说的每一句话都是谎话.'试问此人所说的这句话是真是假?"如果他说的是真话，则因这句话也出自克里特人之口，故可推出这句话为假;但反过来，若这句话为假，则未必导致矛盾.这一"悖论"实际上没有构成现代意义下的悖论，但它可看作是悖论的一种起源.

## 24.2 数学悖论和数学史上的三次"危机"

悖论在数学理论中的出现是一件非常严重的事，因为它直接导致了对数学理论的怀疑.正如逻辑学家塔斯基所指出:"我们知道，一个有矛盾的理论一定包含有假命题，而我们是不愿意把一个已被证明是包含有假命题的理论看成是可接受的."如果一个悖论涉及的面十分广泛的话，这种怀疑则又可能发展成为普遍的危机感.数学史上三次"危机"的出现都与数学悖论有着直接的关系.

### 24.2.1 不可通约量悖论和数学史上的第一次"危机"

在古希腊时期，著名的毕达哥拉斯学派所倡导的是"唯数论"哲学，他们相信宇宙万物总可以建立在任何量都通约这个信念之上，即任何量均可以表示为整数与整数之比.由于毕达哥拉斯学派的广泛的社会影响，这一信念也成为当时希腊人的一种普遍信仰.但是大约在公元前五世纪末叶，希腊数学家们终于发现有些量例外.导致这一发现的是在几何中导找正方形的对角线与边的公共度量，这一问题可归结为求方程 $2a^2=b^2$ 的正整数解.事实上，$\sqrt{2}$ 是不可能用整数之比来表示的.那么，$\sqrt{2}$ 是否为数?如果是数，那么就与他们学派的根本信念——整数至上论相矛盾.但是，随着时间的推移，人们很快证实了不可通约量的存在.由于这一事实与传

统观念相抵触,也就看成了悖论.不可通约量悖论冲击着当时希腊人的普遍见解,使他们感到惊奇不安,并在思想上造成了极大的混乱,使他们重新审视号称"天衣无缝"的有理数理论.这就是数学史上的第一次"危机".

西方数学史家还认为芝诺悖论也属于构成第一次"危机"的因素,但典型的是直接冲击数的概念并带来深刻危机感的是不可通约量的发现.

导致这次"危机"的根本原因是认识上的片面性和绝对化.一方面未能正确认识"一切(数量)均可以归纳为整数之比"这一结论的局限性,因此把它看成是绝对的完善的真理,这样实际上就造成了一种片面的、僵化的观念;另一方面,不可通约量的发现,最终必将引起旧观念的急剧崩溃,那么,对于那些思想顽固而未能适应的人来说,也就会产生一种危机感.

### 24.2.2 无穷小悖论和数学史上的第二次"危机"

数学史上第二次"危机"所涉及的主要是微积分理论,微积分是由牛顿、莱布尼兹彼此独立地在前人已经取得的成果的基础上创建的.作为其数学方法的主要基础是"无穷小分析",但牛顿、莱布尼兹的无穷小观念是十分模糊的.牛顿的无穷小量时而为零,时而非零,这在他的微积分著作中很清楚地得到反映.牛顿把微积分称为"流数术",称连续变量为"原数"(又叫"流动量"),用 $v,x,y$ 等表示,在"原数"字母上加点 $\dot{v},\dot{x},\dot{y}$ 等表示每一个原数依它发生的运动面获得的速度(又叫"流动率"),他还使用了"刹那"这一名词,相当于无穷小量,用 $O$ 表示,现举一例来说明牛顿求流动率的方法.

设给定函数 $2x^2-y=0$,时间的刹那用 $O$ 表示,$x,y$ 的刹那用 $\dot{x},\dot{y}$ 乘上 $O$ 即 $\dot{x}O,\dot{y}O$ 表示,用 $x+\dot{x}O,y+\dot{y}O$ 代 $x,y$ 并整理得

$$4x\cdot\dot{x}O+2\dot{x}O\cdot\dot{x}O-\dot{y}O=0, \qquad (1)$$

全式除以 $O$ 得.

$$4x\cdot\dot{x}+2\dot{x}O\cdot\dot{x}-\dot{y}=0 \tag{2}$$

因 $O$ 是无穷小量,舍弃含 $O$ 的项得

$$4x\cdot\dot{x}-\dot{y}=0. \tag{3}$$

结果是正确的,但牛顿对 $O$ 为个无穷小量的解释是不清楚的. 将(1)式除以 $O$,显然将 $O$ 作为非零处理,否则毫无意义. 而在(2)中舍去含 $O$ 的项,这显然将 $O$ 看作零处理,从而零乘以任何数均为零. 这样,牛顿在求流动率的过程中包含着明显的逻辑矛盾.

与牛顿各自独立地完成微积分创建工作的另一位数学家是德国的莱布尼兹. 牛顿建立微积分主要从运动学出发,而莱布尼兹则从几何学的角度去考虑. 在莱布尼兹的微积分理论中,他对他的 $dx$,$dy$ 也未能作出正确解释,有时把微分看作有限量确定的差,有时又把它看作无穷小量,也始终没有找到从有限量到无穷小量过渡的桥梁. 因此,无穷小分析中是包含有悖论的.

由于爱尔兰的大主教、主观唯心主义哲学家贝克莱在 1734 年出版的《分析学家》一书中,首先揭露了在无穷小分析中包含的无穷小时而为零时而为非零的这种逻辑矛盾,因此无穷小悖论又称"贝克莱悖论". 数学史表明,这一悖论的发现也引起了一定的思想混乱. 这就是数学史上的第二次"危机".

导致这次"危机"的原因也在于人的认识. 一方面,由于无穷小分析确实在实际应用中取得了光辉的成就,因此,为胜利鼓舞的数学家们就容易把这一理论看成是完美无缺的,从而掩盖了其内部的不严密性;另一方面,无穷小分析中所包含的逻辑矛盾被尖锐地揭示了出来,他们自然也就不能正确地对此作出解释,并由此陷入"危机".

### 24.2.3 集合论悖论与数学史上的第三次"危机"

19 世纪末叶,集合论已被证明是数学中最基本的和应用最广泛的概念,它把纯粹数学的基础理论统一了起来. 1900 年在巴黎

召开的国际数学家会议上,当时最有权威的数学家庞加莱宣布:"现在我们可以说,完全的严格化已经达到了."可是,就在他说这句话的时候,危机已在酝酿,一场震撼整个数学大厦基础的暴风雨便来临了.在集合论内部竟然也出现了悖论.

布拉利—福蒂(Burali-Forti)悖论又称"最大"序数悖论.它是意大利数学家布拉利—福蒂在1897年发现的.其实康托早在1895年已发现.康托悖论又称"最大"基数悖论,它是集合论的奠基者康托于1899年发现的.如果说这两个悖论仅仅是牵涉到集合论中一些较为专门的技术性问题,只要把一些定理的证明作些调整和修改便可解决,还不至于引起"危机",而罗素悖论的出现则不然.因为它并不是涉及集合的一些新的可疑结果,而是涉及集合和元素这些简单明了的概念.现对罗素悖论作一介绍.

对于集合论来说,最基本的概念是"集合"和"元素"以及"属于"关系.依逻辑二分法,集合可分为两类:第一类是异常集合,这类集合的特点是集合本身可以作为自己的一个元素,如非人的集合.因为非人的集合还是非人,所以非人的集合本身可作为非人集合的一个元素.第二类是正常集合,这类集合的特点是集合本身不可以作为自己的一个元素,如由学生组成的班级这个集合.由于班级的元素是学生,而班级本身不是学生,因此班级不能作为其自身的一个元素.现设$S_0$是所有正常集合组成的一个新集合,即$S_0=\{x|x\notin x\}$,那么,考虑"$S_0$是否属于自身"的问题.根据排中律,有两种情况:

(1)若$S_0$属于自身,即$S_0$是异常集合,而由$S_0$的定义,它是由所有正常集合构成的,所以可推得$S_0$不属于自身,从而矛盾;

(2)若$S_0$不属于自身,即$S_0$是正常集合,由$S_0$的定义可知,$S_0$属于自身,从而也矛盾.

因此,矛盾是不可避免的,这就是罗素悖论.这一悖论的发现清楚地表明,(朴素)集合论是包含有逻辑矛盾的.由于集合论事实

上已成为整个数学的基础,因而,罗素悖论所威胁的不仅是集合论,而是整个数学.数学家们甚至逻辑学家们感到极大的震惊,这就是数学史上的第三次"危机".在一定程度上,这次危机是前两次危机的深化和发展,因为集合论悖论所涉及的问题更加深刻,涉及的范围更为广阔.

在这次危机中,除了确有些属于数学和逻辑本身需要进一步解决的问题外,更根本的仍是人的认识问题.普遍认为集合论的概念是逻辑概念,因此集合是属于逻辑的,而逻辑的理论似乎应该是没有矛盾的.因此,当数学被奠基于(朴素)集合论之上时,数学家们就十分乐观,认为"绝对的严格性"已经达到了.但是,所谓的"严格"只能是相对的,逻辑本身也如此.追求"绝对的严格"只是一种形而上学的设想.因此集合论悖论的出现对那些总想为数学寻找一种一劳永逸的、绝对严格的数学家们来说,当然无法接受.

总之,由于数学悖论导致了数学史上的三次"危机".但是,这种"危机"只是一种认识上的危机,而并非是数学本身的危机.因为数学史表明,"危机"并没有导致理论上的倒退,而是使数学理论得到进一步的发展和深化.因此,我们应正确认识数学"危机"的实质,并且通过具体的分析来促成认识上的危机向认识的新发展的转化.

## 24.3 数学悖论的成因和意义

### 24.3.1 数学悖论的成因

首先,人的认识和客观实际的矛盾是产生数学悖论的根本原因.如所知,各个理论体系是在人类认识的各个历史阶段上形成的,而人的认识总具有历史的局限性和相对性,因此,在某一理论体系中就有可能产生悖论.如不可通约量悖论就是直接由主观认识与客观实际发生矛盾而引起的.

又以罗素悖论为例,从静态观点看:集合是一种完成了的对

象,因此可以构造一个包含所有集合的集合即大全集.从动态观点看:集合又是处在构造过程中的对象.因为对集合 R 来说,可以不断构造由 R 中所有不属于自身的元素所组成的集合.数学和逻辑要求集合只能具有一义性即要么强调过程性,要么强调完成性.在形式系统内,分别地反映集合的这两种属性都是合理的,但把二者联结起来便构成了悖论,集合论中的其余悖论以及无穷小悖论均类似.这些悖论是由形式化的方法和客观规律之间的矛盾而产生,这是一种间接的主客观矛盾.

其次数学的抽象性也造成悖论的原因之一.数学的抽象性表现在内容的抽象和方法的抽象上,即数学是从量的侧面来反映客观现实,面数学的对象是借助于明确的定义、逻辑地给予“构造”的,这往往意味着对于真实的脱离.因此,数学中的概念包含有一定的主观和构造的成分.数学的抽象性还表现在抽象的程度大大超过了其他自然科学中的抽象,因此,如果我们不断地由概念去引出概念,抽象之上去进行再抽象,量的变化最终必将导致质的改变;因此就可能因完全脱离实际而产生悖论.

总之,由于数学方法是人们认识世界的一种手段,数学家的认识活动又是人类认识活动的一个侧面,因此数学悖论从根本上说是人的认识水平与客观实际发生矛盾而产生.同时,任何一个悖论都是相对于数学发展的某一特定的历史阶段的,因而也就没有绝对意义下的悖论.

**24.3.2 数学悖论的意义**

1)数学悖论成为数学发展的契机

数学悖论的出现是令人烦恼的.但人们对它采取了积极的态度,或分析其性质,或寻找其原因,或制订消除的方案,这些积极的做法在不知不觉中促进了数学的发展.

为解决不可通约量悖论和芝诺悖论带来的种种困难,摆脱第一次“危机”,先后产生了欧多克索斯的比例理论和阿基米德的“穷

竭法”. 欧多克索斯的比例理论是一个纯粹几何性质的比例理论，它为处理无理数提供了逻辑依据，从而也拯救了整个希腊数学；古希腊的数学研究也因此而转向了几何. 从历史的观点看，希腊数学在几何上取得了辉煌成就，而它的代数和算术则由于回避无理数的概念而发展缓慢. 而阿基米德的“穷竭法”可以说是极限理论的雏形，为后人的研究奠定了基础. 希腊人本来可进一步导出极限思想，但他们在挑战前退缩了，坐失了良机.

为摆脱第二次“危机”，解决无穷小悖论，许多数学家围绕微积分应建立在怎样的基础之上作了大量研究，如把微积分建立在几何学、代数学或动力学的基础上，但所有这些努力仍无法解决由无穷小量引起的逻辑矛盾. 法国数学家柯西第一个把无穷小概念建立在算术的基础上，提出了 $\epsilon$(后改为 $\delta$)方法. 当然柯西的极限理论是有一定缺陷的，但重要的是他指出了微积分研究的一个新方向——算术化，从而导致了实数理论的建立. 维尔斯特拉斯也在柯西的基础上用“$\epsilon-\delta$”方法建立了严格的极限理论. 伴随着实数理论的建立，又开拓了集合论和数理逻辑这两个领域. 有了实数理论，加上集合论和严格的极限理论，数学分析就建立在当时被认为是牢固的逻辑基础上，结束了 300 多年的混乱局面，也在一定意义上解决了导致这次“危机”的悖论.

为解决引起第三次“危机”的集合论悖论，有两个考虑方向：一个是单就集合论本身进行悖论问题的研究；另一个是从整体上考虑整个数学科学的对象、方法和理论结构.

第一方向是公理化集合论方向. 集合论悖论的产生与使用太大的集合有关. 因此要重新表述集合论以排除太大的集合，而这只要列出一些公理来加以控制即可，这样也就避免了悖论的产生. 基于这种思想，先后产生了 ZFC 公理集合论系统和 BG$f$ 公理集合论系统. 但是，这条途径并没有完全解决集合论悖论问题，它只能否定性地保证到目前为止还没有遇到矛盾. 那么，矛盾究竟从何而

来？这就使得数学家在数学的整体上作出研究.

第二方向是从整体上考虑数学的对象、理论和方法，形成了数学基础研究的三个学派，即以布劳威尔为代表的直觉主义学派，以希尔伯特为代表的形式主义学派以及以罗素为代表的逻辑主义学派.这三个学派围绕“危机”展开了激烈的争论，虽然三大派别的论战并没有得到明确结果，但从方法论的角度看也各有其重要贡献.

2)数学悖论成为哲学、逻辑发展的一种动力

数学悖论的产生和解决导致了数学基础研究的深入，而数学基础研究的深入又直接促进哲学、逻辑的发展.如为解决罗素悖论，由于哲学观点的不同出现了三个学派，作为其哲学思想的具体体现，这三个学派又分别提出了具体的规划：对逻辑主义者来说，就是如何由逻辑的概念和法则出发去展开全部的数学理论；直觉主义者则力图按照构造性的要求去发展直觉主义数学，希尔伯特则提出了著名的希尔伯特规划.他们都希望通过具体研究规划的实施来证明自己的数学哲学思想的正确性.由于这三个学派的数学哲学思想归根结蒂地说是唯心的和形而上学的，因此，他们的研究规划都没有成功，但这又促使人们去进行新的哲学思考.

另外，由于数学悖论是在形式系统内由真实的前提和严格的推理规则推出的矛盾，故形式逻辑的规则对悖论命题是失效的，悖论不可能在这里找到根本的出路.这种状况中必然会给逻辑带来新的发展.

总而言之，数学悖论已成为哲学、逻辑发展的一种动力.哲学、逻辑若不发展自身的理论，就很难对数学科学发挥指导作用，甚至还会危及自身的存在.我们相信，随着哲学、逻辑的发展，人们对数学悖论的研究将有一个全新的飞跃.

# 主要参考书目

[1][美]M.克莱茵著．张理京等译．古今数学思想．上海:上海科学技术出版社．1979
[2][美]H.伊夫斯著．欧阳绛译．数学史概论．太原:山西人民出版社．1986
[3][英]李约瑟著．中国科学技术史．北京:科学出版社．1978
[4][苏]斯特洛伊克著．关娴译．数学简史．北京:科学出版社 1956
[5][英]斯科特著．候德润等译．数学史．北京:商务印书馆 1981
[6][苏]Б.Б.鲍尔加尔斯基著．潘德松等译．数学简史．上海:知识出版社．1984
[7][美]P.D.库克著．现代数学史．呼和浩特:内蒙古人民出版社．1984
[8][美]亨利·托马斯等著．伟大科学家生活传记．南京:江苏科学技术出版社．1980
[9][德]瑞德著．希尔伯特．上海:上海科技出版社．1982
[10][苏]Г.В.巴格拉尼图著．卡·弗·高斯．北京:测绘出版社 1957
[11][法]A·达尔玛著．伽罗华传．北京:商务印书馆．1981
[12][德]H·武辛著．伊萨克·牛顿．北京:科学普及出版社．1979
[13]王前编译．大数学家的思维方式．沈阳:辽宁教育出版社 1986
[14][苏]亚历山大罗夫等著．数学——它的内容、方法和意义．

北京:科学出版社 .1958
[15]S·乌拉姆著 . 一个数学家的经历 . 上海:上海科技出版社 1989
[16]B·罗素著 . 我的哲学的发展 . 北京:商务印书馆 .1982
[17][瑞典]L·戈丁 .《数学概观》. 北京:科学出版社 .1984
[18]吴文俊主编 . 世界著名数学家传记 . 北京:科学出版社 1995
[19]解恩泽、徐本顺主编 . 世界数学家思想方法 . 济南:山东教育出版社 .1993
[20]李迪著 . 中国数学史简编 . 沈阳:辽宁人民出版社 .1984
[21]梁宗巨著 . 世界数学史简编 . 沈阳:辽宁人民出版社 .1981
[22]张奠宙、赵斌著 .20 世纪数学史话 . 上海:知识出版社 .1984
[23]袁小明著 . 世界著名数学家评传 . 南京:江苏教育出版社 1987
[24]王鸿钧等著 . 中国古代数学思想方法 . 南京:江苏教育出版社 .1989
[25]中外数学史编写组 . 外国数学简史 . 济南:山东教育出版社 1987
[26]中外数学史编写组 . 中国数学简史 . 济南:山东教育出版社 1987
[27]徐利治著 . 数学方法论选讲 . 武汉:华中工学院出版社 1983.4
[28]黄翔著 . 数学方法论选论 . 重庆:重庆大学出版社 .1995.4
[29]郑毓信著 . 数学方法论 . 南宁:广西教育出版社 .1991
[30]托卡拉斯著 . 证明与反驳 . 上海:上海译文出版社 .1987
[31][美]G.波利亚著 . 数学与猜想(一 . 二卷). 北京:科学出版社 .1980
[32]解恩泽 . 徐本顺主编 . 数学思想方法 . 济南:山东教育出版

社 .1989

[33]吴振奎著 . 数学方法选讲 . 沈阳:辽宁教育出版社 .1993.12

[34]张奠宙 . 过伯祥著 . 数学方法论稿 . 上海:上海教育出版社 1996.3

[35]王鸿钧 . 孙宏安著 . 数学思想方法引论 . 北京:人民教育出版社 .1992.7

[36]赵振威著 . 数学发现导论 . 合肥:安徽教育出版社 .1993.11

[37]张景中著 . 数学与哲学 . 长沙:湖南教育出版社 .1990.1

[38]刘云章著 . 数学符号学概论 . 合肥:安徽教育出版社 .1993.3

[39]欧阳绛著 . 数学方法溯源 . 南京:江苏教育出版社 .1991.2

[40]孙兴运著 . 数学符号史话 . 济南:山东教育出版社 .1998.9

[41][美]G.波利亚著 . 数学与似真推理 . 福州:福建人民出版社 1985.10

[42]T. Heath. A History of Greek Mathematics. Oxford at the Clarendon Press. 1921

[43]E.T.Bell. Men of Mathematics. Simon and Schuster. 1937

[44]I. Thomas. Selections I Llunstrating the History of Greek Mathematics. Harvard Univ. Press. 1957

[45]D.E. Smith. History of Mathematics. Ginn and Co. 1923

[46]D.T. Whiteside. The Mathematical Papers of Isaac Newton. Cambridge. 1969

[47]B.L. van der waerden. A History of Algebra. Springer－Verlag Berlin Heidelberg. 1985

[48]F. Klein. Development of Mathematics in the 19th Century. Math Scipress. 1979

# 后 记

数学是一门古老的学科,同时也是现代科学技术发展的基础,随着人类文明程度的提高和社会的进步,数学的方法、思想在科学技术和人们的日常生活中的作用愈来愈明显,并已成为人的基本素质的一个重要组成部分。

众所周知,我们所学习的数学,在某种意义上可以说是"历史上的数学",即就它的方法而言,都是前人的研究成果。因此,我们所学的数学与她的历史有着密切的联系。我们不应当割断这种联系去孤立地学习与研究数学。同其他事物一样,数学的发展有自身的继承性、连续性以及规律性,而数学史正是研究数学发展的继承性、连续性以及规律性的一门学科。学习与研究数学史,不仅能溯本求源,了解数学概念、思想与方法的来龙去脉,而且通过总结和概括数学发展的规律,可以使我们了解唯物辩证法对数学发展的影响,从而加深对数学的理解,进一步推动数学学科的发展。正如德国著名数学家、微积分的发明者之一莱布尼兹(Leibniz,Gottfried Wilhelm,1646.7.1 ~1716.11.14)曾经说过的那样,"数学史的用处不仅在于历史地、公正地衡量每一个人,使得后来的人指望可能得到同样的称赞,而且还在于促进数学这门学科的进一步发展。"

心理学研究表明,人类学习某一知识与前人发现这一知识的思维活动具有相似性。如果我们在学习与研究数学史的过程中,有意识地弄清我们所教的数学内容及方法的发生与发展的思维过程,在教学过程中设法创设相应的思维环境,这样将会得到较好的教学效果。从这个意义上讲,数学史的学习与研究,可以帮助我们

寻找到最基本的数学教学方法。

基于以上诸方面的原因,我们选择了一些数学发展进程中的重要思想方法,从历史的角度切入,介绍其来龙去脉,分析其产生原因,以专题的形式,奉献给读者,期望能对大家学习、理解和应用数学方法有所帮助。

由于作者水平有限,书中缺点和错误之处在所难免,敬请读者批评指正,以便再版时改进。

在此,我们特别感谢著名数学家、数学教育家、中科院院士王梓坤先生在百忙之中,审阅了部分书稿,并为本书作序。还要感谢邱兆璋先生为本书的出版所作的无私的帮助。

作者

1999年5月